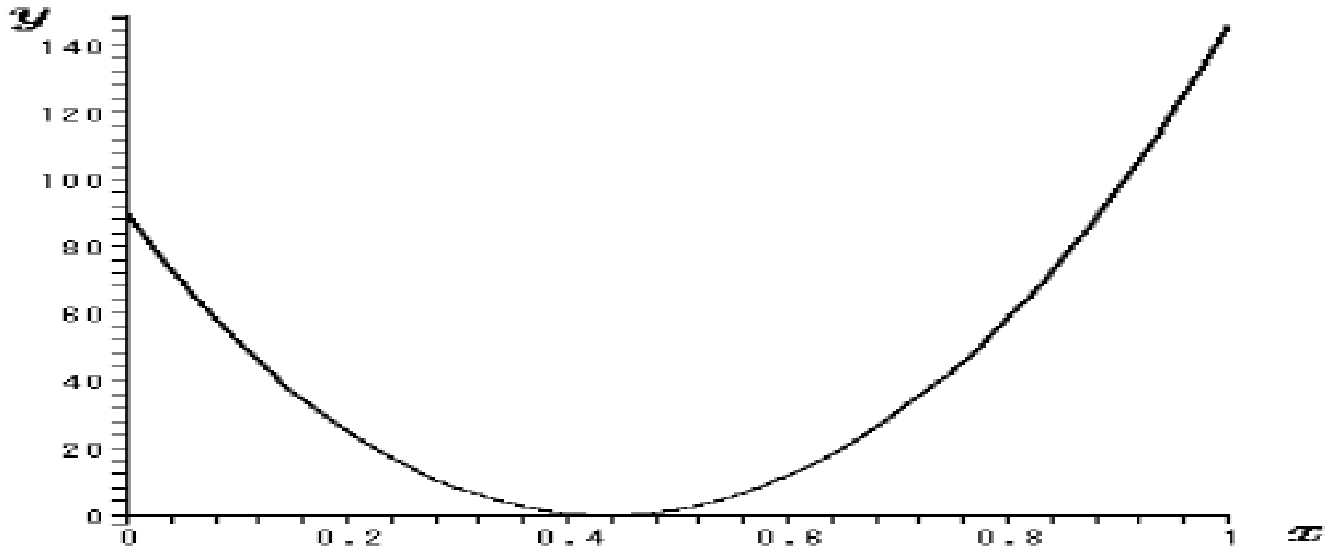
# フーリエの定理とスツルムの定理

Example $f(x) := 125x^4 - 250x^3 + 621x^2 - 440x + 90 = 0 \ in \ (0,1)$.




$$f'(x) = 500x^3 - 750x^2 + 1242x - 440 = 0$$

$$f'(0.4355\cdots) = 0?, \quad f(0.4355\cdots) = 0.006\cdots?.$$

Is this argument reliable ?

# フーリエの定理

実係数の$n$次方程式$f(x)$の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x), \cdots, f^{(\mathrm{n})}(x)$$

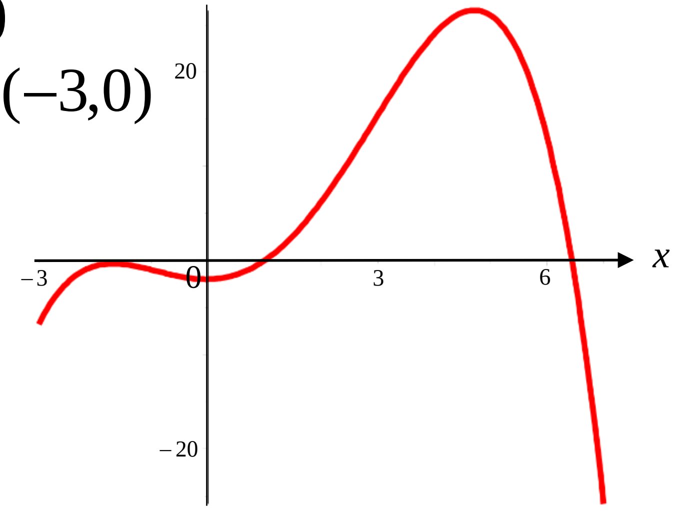
の$x$における符号変化数を$v(x)$とおく. $f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0$ならば,

区間$(a,b)$における$f(x)=0$の実根の個数は

$\underline{v(a)-v(b)}$に等しいか, またはそれより<u>偶数だけ少ない</u>.

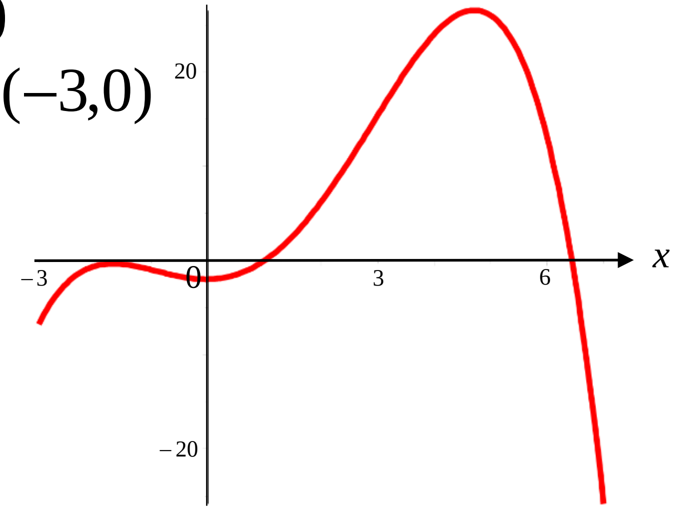
$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3, 0)$



$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




**導関数列**

$$f = -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20$$

$$f' = -4x^3 + 12x^2 + 32x + 20$$

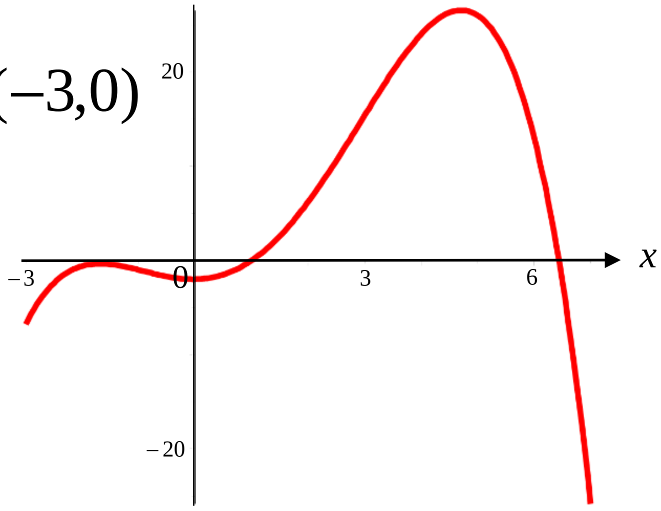
$$f^{(2)} = -12x^2 + 24x + 32$$

$$f^{(3)} = -24x + 24$$

$$f^{(4)} = -24$$

$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




**導関数列**

$$f = -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20$$

$$f' = -4x^3 + 12x^2 + 32x + 20$$

$$f^{(2)} = -12x^2 + 24x + 32$$

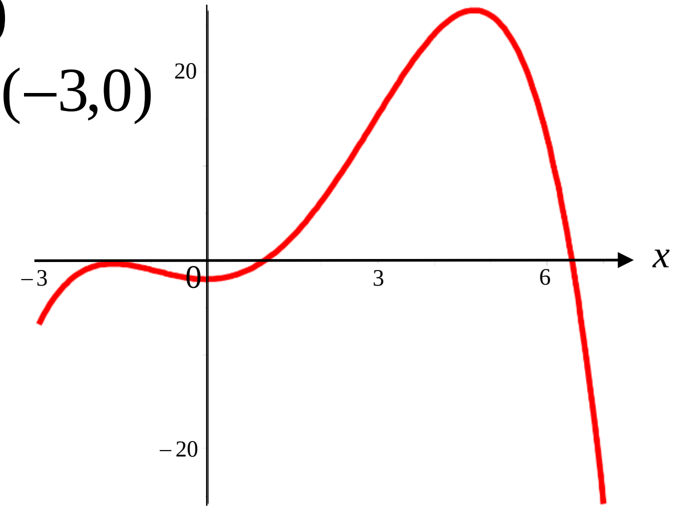
$$f^{(3)} = -24x + 24$$

$$f^{(4)} = -24$$

| $x$ | $-3$ | $0$ |
|---|---|---|
| $f$ | $-$ | $-$ |
| $f'$ | $+$ | $+$ |
| $f^{(2)}$ | $-$ | $+$ |
| $f^{(3)}$ | $+$ | $+$ |
| $f^{(4)}$ | $-$ | $-$ |
| $v$ | 4 | 2 |

$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




**導関数列**

$$f = -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20$$

$$f' = -4x^3 + 12x^2 + 32x + 20$$

$$f^{(2)} = -12x^2 + 24x + 32$$

$$f^{(3)} = -24x + 24$$

$$f^{(4)} = -24$$

| $x$ | $-3$ | $0$ |
|---|---|---|
| $f$ | $-$ | $-$ |
| $f'$ | $+$ | $+$ |
| $f^{(2)}$ | $-$ | $+$ |
| $f^{(3)}$ | $+$ | $+$ |
| $f^{(4)}$ | $-$ | $-$ |
| $v$ | 4 | 2 |

$$v(-3) - v(0) = 4 - 2 = 2$$

区間 $(-3,0)$での実根の個数は2または0

# フーリエの定理

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x),\cdots,\ f^{(n)}(x)$$

の $x$ における符号変化数を $v(x)$ とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ ならば,

区間 $(a,b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は

$\underline{v(a)-v(b)}$ に等しいか, またはそれより<u>偶数だけ少ない</u>.

<u>例</u>　$v(a)-v(b)=2$

$f(x)$ の実根の個数は2または0

# フーリエの定理

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x), \cdots,\ f^{(\mathrm{n})}(x)$$

の $x$ における符号変化数を $v(x)$ とおく. $f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0$ ならば,

区間 $(a, b)$ における $f(x) = 0$ の実根の個数は

$v(a) - v(b)$ に等しいか, またはそれより偶数だけ少ない.

例　$v(a) - v(b) = 1$

$f(x)$ の実根の個数は $1$

この場合には，幸運にも，
個数を確定できる．

# スツルムの定理 $f(x)$:実係数の $n$ 次多項式. $f(x)=0$ は重根もたない.

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \cdots,\ f_n(x)$$

の $x$ における符号変化数を $V(x)$ とおく. $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ ならば,

区間 $(a,b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は $\underline{V(a)-V(b)}$ に等しい.

# スツルムの定理 $f(x)$:実係数の $n$ 次多項式. $f(x)=0$ は重根もたない.

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \cdots,\ f_n(x)$$

の $x$ における符号変化数を $V(x)$ とおく. $f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0$ ならば,

区間 $(a, b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は $\underline{V(a)-V(b)}$ に等しい.

---

$\boxed{\text{スツルム列}}$ : $f(x)$ と $f'(x)$ についてユークリッドの互除法を適用

ただし,余りの前に－をつける

$$f(x) = q_1(x) f'(x) \boxed{-} f_2(x)$$

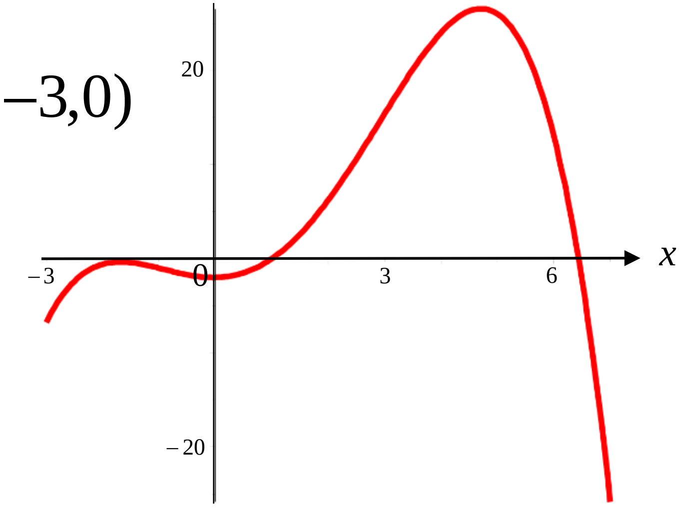
$$f_1(x) = q_2(x) f_2(x) \boxed{-} f_3(x)$$

$$f_2(x) = q_3(x) f_3(x) \boxed{-} f_4(x)$$

$$\vdots$$

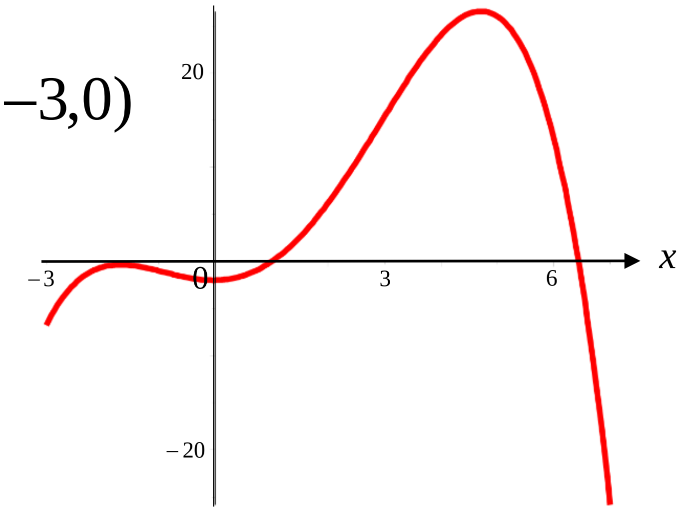
$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$



$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




$f, f'$ についてユークリッドの互除法

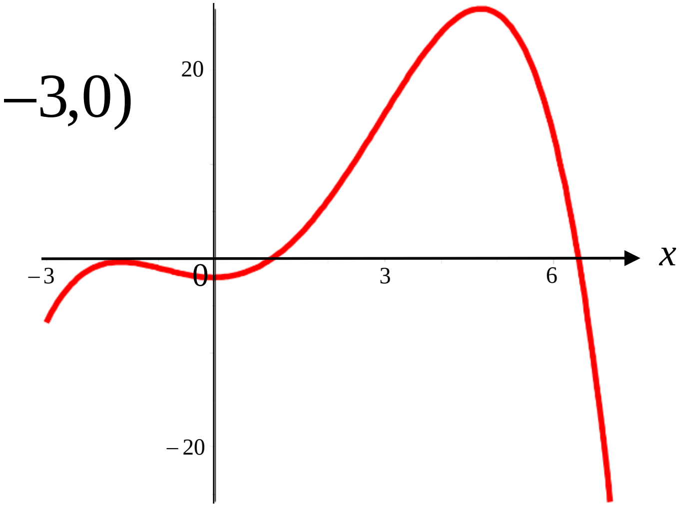
$$f = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)f' - \left(-11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}\right)$$

$$f_1 = \left(\frac{4}{11}x - \frac{167}{121}\right)f_2 - \left(-\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}\right)$$

$$f_2 = \left(\frac{5324}{6167}x - \frac{46699103}{38031889}\right)f_3 - \frac{568505795}{38031889}$$

$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




$f, f'$ についてユークリッドの互除法

$$f = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)f' - \left(-11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}\right)$$

$$f_1 = \left(\frac{4}{11}x - \frac{167}{121}\right)f_2 - \left(-\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}\right)$$

$$f_2 = \left(\frac{5324}{6167}x - \frac{46699103}{38031889}\right)f_3 - \frac{568505795}{38031889}$$

スツルム列

$$f_0 = -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20$$

$$f_1 = -4x^3 + 12x^2 + 32x + 20$$

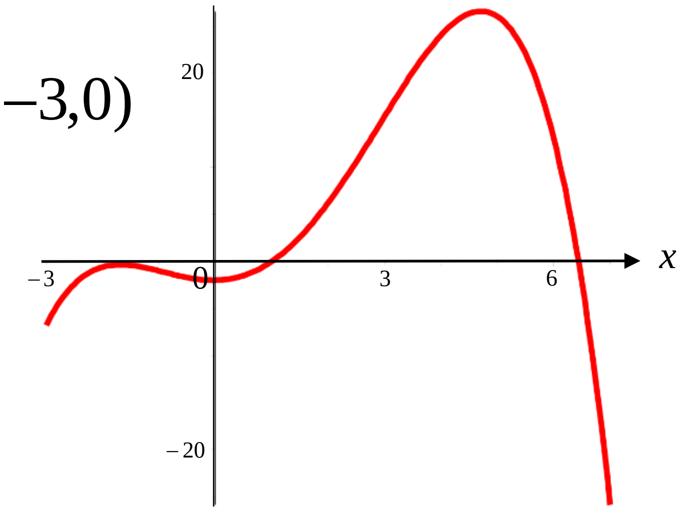
$$f_2 = -11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}$$

$$f_3 = -\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}$$

$$f_4 = -\frac{568505795}{38031889}$$

$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




$f, f'$ についてユークリッドの互除法

$$f = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)f' - \left(-11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}\right)$$

$$f_1 = \left(\frac{4}{11}x - \frac{167}{121}\right)f_2 - \left(-\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}\right)$$

$$f_2 = \left(\frac{5324}{6167}x - \frac{46699103}{38031889}\right)f_3 - \frac{568505795}{38031889}$$

**スツルム列**

$$f_0 = -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20$$

$$f_1 = -4x^3 + 12x^2 + 32x + 20$$

$$f_2 = -11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}$$

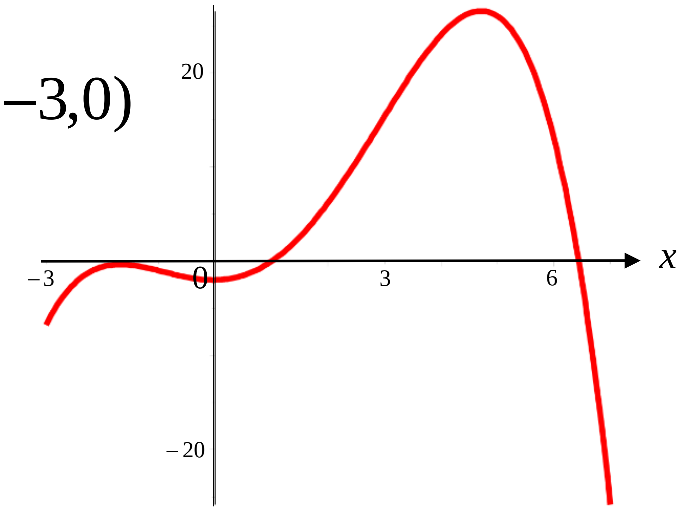
$$f_3 = -\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}$$

$$f_4 = -\frac{568505795}{38031889}$$

| $x$ | $-3$ | $0$ |
|---|---|---|
| $f_0$ | $-$ | $-$ |
| $f_1$ | $+$ | $+$ |
| $f_2$ | $-$ | $+$ |
| $f_3$ | $-$ | $-$ |
| $f_4$ | $-$ | $-$ |
| $V$ | 2 | 2 |

$$f(x) := -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20 = 0$$

区間 $(-3,0)$




$f, f'$ についてユークリッドの互除法

$$f = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)f' - \left(-11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}\right)$$

$$f_1 = \left(\frac{4}{11}x - \frac{167}{121}\right)f_2 - \left(-\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}\right)$$

$$f_2 = \left(\frac{5324}{6167}x - \frac{46699103}{38031889}\right)f_3 - \frac{568505795}{38031889}$$

**スツルム列**

$$f_0 = -x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x - 20$$

$$f_1 = -4x^3 + 12x^2 + 32x + 20$$

$$f_2 = -11x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{79}{4}$$

$$f_3 = -\frac{6167}{484}x - \frac{13677}{484}$$

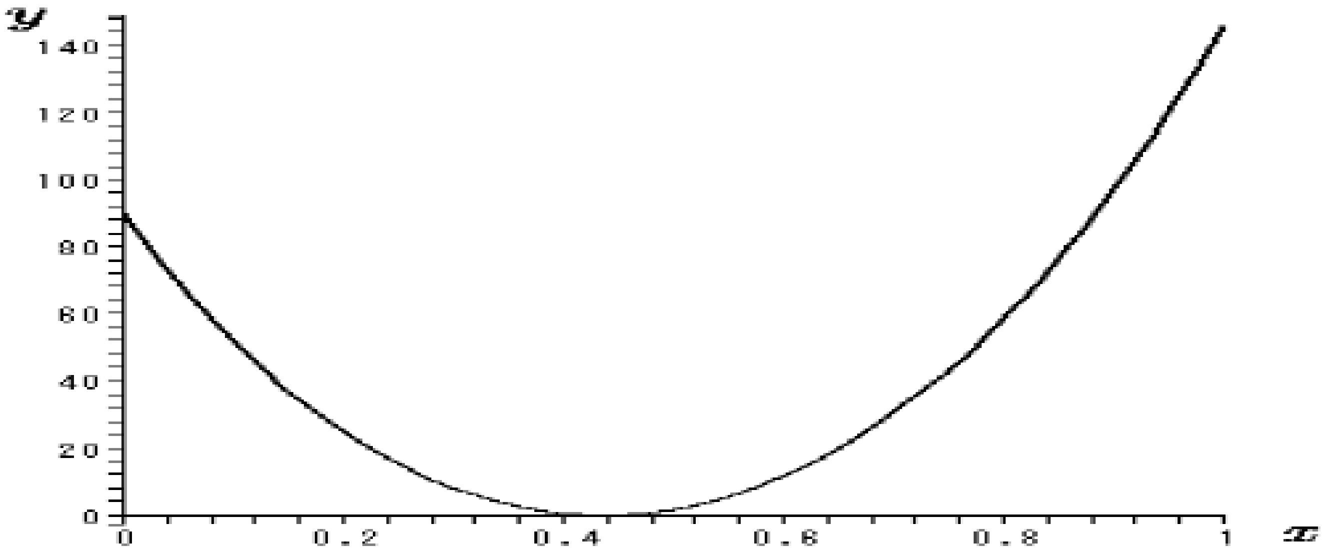
$$f_4 = -\frac{568505795}{38031889}$$

| $x$ | $-3$ | $0$ |
|---|---|---|
| $f_0$ | $-$ | $-$ |
| $f_1$ | $+$ | $+$ |
| $f_2$ | $-$ | $+$ |
| $f_3$ | $-$ | $-$ |
| $f_4$ | $-$ | $-$ |
| $V$ | 2 | 2 |

$$V(-3) - V(0) = 2 - 2 = 0$$

区間 $(-3,0)$ での実根の個数は $0$

Example $f(x) := 125x^4 - 250x^3 + 621x^2 - 440x + 90 = 0$ *in* $(0,1)$.




$$f'(x) = 500x^3 - 750x^2 + 1242x - 440 = 0$$

$$f'(0.4355\cdots) = 0?, \quad f(0.4355\cdots) = 0.006\cdots?.$$

Is this argument reliable ?

$$f(x) := 125x^4 - 250x^3 + 621x^2 - 440x + 90 = 0$$

$$f'(x) = 500x^3 - 750x^2 + 1242x - 440 = 0$$

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = f'(x)$$

$$f_2(x) = (-867\ x^2 + 699\ x - 140)/4,$$

$$f_3(x) = -(220894496x - 96212720)/250563,$$

$$f_4(x) = 4629216988985/762412161923344$$

$$f_0(0) = 90, \quad f_1(0) = -440, \quad f_2(0) = -35,$$

$$f_3(0) = 96212720/250563,$$

$$f_4(0) = 4629216988985/762412161923344,$$

$$f_0(1) = 146, \quad f_1(1) = 552, \quad f_2(1) = -77,$$

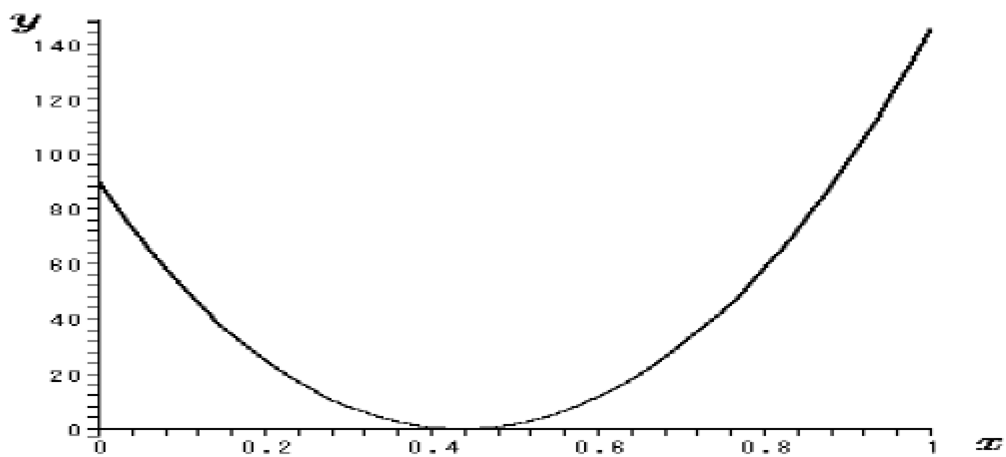
$$f_3(1) = -41560592/83521,$$

$$f_4(1) = 4629216988985/762412161923344.$$

Therefore we obtain

$$V(0) - V(1) = 2 - 2 = 0.$$

Therefore, there exists no real root in $(0, 1)$




コメント：　フーリエ列を用いると，V(0)-V(1)= 4 – 0 = 4.

フーリエの定理では，4個, 2個, 0個 のいずれかということしかわからない．

# スツルムの定理　　重根をもたない

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$$

の $x$ における符号変化数を $V(x)$ とおく. $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$ ならば,

区間 $(a, b)$ における $f(x) = 0$ の実根の個数は $\underline{V(a) - V(b)}$ に等しい.

# スツルムの定理

重根をもたない

**例** $V(a)-V(b)=2$

$f(x)$の実根の個数は2

実係数の$n$次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\cdots,\ f_n(x)$$

の$x$における符号変化数を$V(x)$とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ ならば,

区間$(a,b)$ における$f(x)=0$の実根の個数は$\underline{V(a)-V(b)}$に等しい.

# スツルムの定理

重根をもたない

例 $V(a)-V(b)=2$

$f(x)$の実根の個数は2

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\cdots,\ f_n(x)$$

の $x$ における符号変化数を$V(x)$とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ ならば,

区間$(a,b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は$\underline{V(a)-V(b)}$に等しい.

# フーリエの定理

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x),\cdots,\ f^{(\mathrm{n})}(x)$$

の $x$ における符号変化数を$v(x)$とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ ならば,

区間$(a,b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は $\underline{v(a)-v(b)}$ に等しいか,

またはそれより偶数だけ少ない.

# スツルムの定理

重根をもたない

例 $V(a)-V(b)=2$

$f(x)$の実根の個数は2

実係数の$n$次方程式$f(x)$の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\cdots,\ f_n(x)$$

の$x$における符号変化数を$V(x)$とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ならば,

区間$(a,b)$における$f(x)=0$の実根の個数は$\underline{V(a)-V(b)}$に等しい.

# フーリエの定理

例 $v(a)-v(b)=2$

$f(x)$の実根の個数は2または0

実係数の$n$次方程式$f(x)$の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x),\cdots,\ f^{(\mathrm{n})}(x)$$

の$x$における符号変化数を$v(x)$とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ならば,

区間$(a,b)$における$f(x)=0$の実根の個数は$\underline{v(a)-v(b)}$に等しいか,

またはそれより偶数だけ少ない.

## スツルムの定理

重根をもたない

例 $V(a)-V(b)=2$

$f(x)$の実根の個数は2

実係数の$n$次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$$

の$x$における符号変化数を$V(x)$とおく. $f(a)\neq 0, f(b)\neq 0$ならば,

区間$(a,b)$における$f(x)=0$の実根の個数は$\underline{V(a)-V(b)}$に等しい.

## フーリエの定理

例 $v(a)-v(b)=1$

$f(x)$の実根の個数は

実係数の$n$次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x), f'(x), f^{(2)}(x), \cdots, f^{(n)}(x)$$

の$x$における符号変化数を$v(x)$とおく. $f(a)\neq 0, f(b)\neq 0$ならば,

区間$(a,b)$における$f(x)=0$の実根の個数は$\underline{v(a)-v(b)}$に等しいか,

またはそれより偶数だけ少ない.

# スツルムの定理

重根をもたない

例 $V(a)-V(b)=2$

$f(x)$の実根の個数は2

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{スツルム列}}$

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\cdots,\ f_n(x)$$

の $x$ における符号変化数を$V(x)$とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ ならば,

区間$(a,b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は$\underline{V(a)-V(b)}$に等しい.

# フーリエの定理

例 $v(a)-v(b)=1$

$f(x)$の実根の個数は1

実係数の $n$ 次方程式 $f(x)$ の $\boxed{\text{導関数列}}$

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x),\cdots,\ f^{(\mathrm{n})}(x)$$

の $x$ における符号変化数を$v(x)$ とおく. $f(a)\neq 0,\ f(b)\neq 0$ ならば,

区間$(a,b)$ における $f(x)=0$ の実根の個数は $\underline{v(a)-v(b)}$ に等しいか,

またはそれより<u>偶数だけ少ない</u>.

## The Euclid Algorithm

**Example.** $(42, 24) = 6$

In fact,

$$42 = 1 \times 24 + 18$$

$$24 = 1 \times 18 + 6$$

$$18 = 3 \times 6.$$

**Example.** Let $f(x) := x^4 - 11x^3 + 44x^2 - 76x + 48.$. Then,

$$(f(x), f'(x)) = x - 2$$

In fact,

$$f(x) := x^4 - 11x^3 + 44x^2 - 76x + 48.,$$

$$f'(x) := 4x^3 - 33x^2 + 88x - 76.$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{11}{16}\right) f'(x) + \left(-\frac{(x-2)(11x-34)}{16}\right),$$

$$f'(x) = 16\left(-\frac{4x}{11} + \frac{139}{121}\right) \cdot \left(-\frac{(x-2)(11x-34)}{16}\right) + \frac{128}{121}(-x+2)$$

$$-\frac{(x-2)(11x-34)}{16} = \left(\frac{11x}{16} - \frac{17}{8}\right)(-x+2).$$

**Example.** Let $f(x) := x^4 - 18x^3 + 119x^2 - 342x + 360$. Then,

$$(f(x), f'(x)) = 1$$

In fact,

$f(x) := x^4 - 18x^3 + 119x^2 - 342x + 360$. $f'(x) := 4x^3 - 54x^2 + 238x - 342$

$$f(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{9}{8}\right) f'(x) + \left(-\frac{5}{4}x^2 + \frac{45}{4}x - \frac{99}{4}\right),$$

$$f'(x) = \left(-\frac{16x}{5} + \frac{72}{5}\right)\left(-\frac{5}{4}x^2 + \frac{45}{4}x - \frac{99}{4}\right) + \left(-\frac{16x}{5} + \frac{72}{5}\right)$$

$$-\frac{5}{4}x^2 + \frac{45}{4}x - \frac{99}{4} = \left(\frac{25x}{64} - \frac{225}{128}\right)\left(-\frac{16x}{5} + \frac{72}{5}\right) + \frac{9}{16}$$

**Example (The Euclid Algorithm)**

$$f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1, \ f'(x) := 3x^2 + 2x - 3.$$

$$f(x) = \left(\tfrac{x}{3} + \tfrac{1}{9}\right) f'(x) + \left(-\tfrac{20}{9}x + \tfrac{4}{3}\right),$$

$$f'(x) = \left(-\frac{27}{20}x - \frac{171}{100}\right)\left(-\frac{20}{9}x + \frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{18}{25}\right)$$

## Sturm sequence

$$f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1, \ f'(x) := 3x^2 + 2x - 3$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) f'(x) - \left(\frac{20}{9}x - \frac{4}{3}\right),$$

$$f'(x) = \left(\frac{27}{20}x + \frac{171}{100}\right)\left(\frac{20}{9}x - \frac{4}{3}\right) - \frac{18}{25}$$

A Sturm sequence for $f(x)$ is defined by

$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$,

where

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = f'(x) = 3x^3 + 2x - 3,$$

$$f_2(x) = \frac{20}{9}x - \frac{4}{3}, \quad f_3(x) = \frac{18}{25}.$$

Define $V(x)$ by

$$V(x) := \text{number of sign changing of Sturm sequence for } f(x).$$

**Example** $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = 3x^3 + 2x - 3, \; f_2(x) = \frac{20}{9}x - \frac{4}{3}, \quad f_3(x) = \frac{18}{25}.$$

$$f_0(-2) = 3, \; f_1(-2) = 5, f_2(-2) = -\frac{52}{9}, \; f_3(-2) = \frac{18}{25},$$

$$f_0(2) = 7, \quad f_1(2) = 13, \quad f_2(2) = \frac{28}{9}, \quad f_3(-2) = \frac{18}{25}.$$

| | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x = -2$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | 2 |
| $x = 2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 |

$V(-2) = 2$

$V(2) = 0.$

**Theorem (Strum)** If $f(x) = 0$ does not have double roots and $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$, then the number $N$ of real zeros in $(a, b)$ is given by

$$N = V(a) - V(b).$$

**Example** $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad in \ (-2, 2)$

$f(x) = 0$ does not have double root, $f(-2) = 3 \neq 0, f(2) = 7 \neq 0$.

Therefore we obtain

$$N := V(-2) - V(2) = 2 - 0 = 2.$$

**Remark** $f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 2x - 1).(x - 1)$

Roots of $f(x) = 0$ are $-1 - \sqrt{2}, \ -1 + \sqrt{2}, \ 1.$