1 階および 2 階
線形定数係数微分方程式の解法

大冨（2003.1.23）

1　対象とする微分方程式

最初にこの小講では，どのような微分方程式を対象にするのか，明らかにしておく．ここでは t を独立変数，x を従属変数として，次の形の微分方程式を取り上げる．

$$\frac{dx}{dt}+ax=f(t) \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=f(t) \tag{1.2}$$

ここで a と b は定数， $f(t)$ は x を含まない t だけの関数であるとする．この形の微分方程式は工学の色々な分野で現れる．従って，その解がどのような関数となるのかを諸君は知っておく必要がある．

上に記した微分方程式は次のような簡略記号で表現される場合もある．

$$\dot{x}+ax=f(t) \tag{1.3}$$

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t) \tag{1.4}$$

変数名や関数名の上にドット（・）をつけてその関数の導関数を表す記法は，スペースをとらないで導関数を表現できるので，この小講では多用される．了解してもらいたい．

微分方程式に関しては，色々な典型的な問題がある．初期値問題，境界値問題，固有値問題などである．ここでは初期値問題だけを取り上げ，他を取り上げない．初期値問題の典型例は力学における物体（質点）の運動解析である．力学では物体の運動法則が微分方程式（ニュートンの運動方程式と呼ばれる）で記述される．ある時刻 $t=t_0$ における物体の運動状態をもとにして，ニュートンの運動方程式を解き，以後（ $t>t_0$ ）の状態を予測しようというのが初期値問題である．ある時刻は任意に選べるので，その時刻を $t_0=0$ としておいても一般性を失わない．少し一般的な言い方をすると，初期値問題とは次のようになる．

『変数 x の（時間）変化の様相が微分方程式で記述されるとき， $t=0$ での x に関する値（初期値）をもとにして， $t>0$ での変数 x の値を求める．』

ここで，“ $t=0$ での x に関する値”が具体的にどのようなものなのか，諸君は想像がつかないかもしれないが，それはこの小講を読み進むにつれて理解できる．

この小講の題目は“１階および２階線形定数係数微分方程式の解法”となっている．題目に含まれている階数について説明しておく．対象とする微分方程式に含まれる導関数の最高階数を n とすると，その微分方程式は n 階の微分方程式と呼ぶ慣わしになっている．従って，ここで取り上げるのは 1 階と 2 階の微分方程式である．線形については新たな節で説明する．今の段階では式(1.1)や式(1.2)を 1 階線形や 2 階線形微分方程式と呼ぶことを認めておいてもらいたい．

2　1 階線形定数係数微分方程式の解法

2.1　1 階線形定数係数同次方程式

微分方程式 $\dot{x}+ax=0$ や $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ を同次方程式と言う． $\dot{x}+ax=f(t)$ や $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ で $f(t)=0$ の場合である．線形定数係数の微分方程式を扱う際の出発点は次の形の同次微分方程式である．

$$\dot{x}+ax=0 \tag{2.1}$$

この形をした微分方程式の解を見つけることは難しくない．初等的な微積分の知識を持ち合わせておれば，簡単に解を予想できる．問題としている $\dot{x}+ax=0$ は，

$$\dot{x} = -ax \tag{2.2}$$

と書ける． aを定数としているので， $\dot{x} + ax = 0$の関係式は次の事柄を主張している．

『求める関数xを微分すると，元の関数を定数倍したものとなる.』

今までに出会った関数を思い出してもらいたい．基本的な関数の種類は多くない筈である．例をあげれば t^nのような多項式， $\sin(\omega t + \theta)$や$\cos(\omega t + \theta)$のような三角関数， a^tや$\exp(t)$のような指数関数，また指数関数の逆関数としての$\log_a t$や$\ln t$などの対数関数．これらの関数を合成して複雑な関数をいくらでも構成できるが，基本的な関数は案外少ないものである．基本的関数が持つ微分についての性質から，微分したら元の関数の定数倍となる関数は簡単に見つけ出せる．この性質を持つのは指数関数であり， Aを定数として，次式が成立する．

$$\frac{d}{dt} A\exp[\gamma t] = \gamma A\exp[\gamma t]$$

従って，この関係式で$\gamma = -a$と読替えれば，

$$\frac{d}{dt} A\exp[-at] = -aA\exp[-at]$$

となり， $\dot{x} + ax = 0$の解は

$$x(t) = A\exp[-at] \tag{2.3}$$

となる．

別の見方で微分方程式$\dot{x} = -ax$の解が$x(t) = A\exp[-at]$となることを示してみる．関係式$\dot{x} = -ax$は先ず， xが微分可能であることを主張している．何故なら， $\dot{x}$の存在を前提にしているからである． xが微分可能であれば， $\dot{x}$も微分可能となる．何故なら，単にxを定数倍したものが$\dot{x}$となるからである． $\dot{x}$も微分可能なので$\dot{x} = -ax$を微分して$t = 0$とすれば次式となる．

$$\ddot{x} = -a\dot{x} \quad , \quad \ddot{x}(0) = -a\dot{x}(0) = a^2 x(0)$$

$\dot{x}$が微分可能なので$\ddot{x}$も微分可能となる．従って同様な操作をしていけば，

$$\dddot{x} = -a\ddot{x} \quad , \quad \dddot{x}(0) = -a\ddot{x}(0) = a^2\dot{x}(0) = -a^3 x(0)$$
$$\vdots$$

となる．ここで，解析学の基本となるマクローリン展開を思い出してもらおう．マクローリン展開は微分可能な関数を$F(t)$として，次式で与えられた．

$$F(t) = F(0) + \frac{t^1}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \frac{t^3}{3!}F'''(0) + \cdots \tag{2.4}$$

$F(t)$に代えて$x(t)$とし，微分方程式から得られる関係を代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \frac{t^1}{1!}\dot{x}(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{x}(0) + \frac{t^3}{3!}\dddot{x}(0) + \cdots \\ &= x(0) + \frac{t^1}{1!}\left\{-ax(0)\right\} + \frac{t^2}{2!}\left\{a^2 x(0)\right\} + \frac{t^3}{3!}\left\{-a^3 x(0)\right\} + \cdots \\ &= x(0) + \frac{(-at)^1}{1!}x(0) + \frac{(-at)^2}{2!}x(0) + \frac{(-at)^3}{3!}x(0) + \cdots \\ &= x(0)\left\{1 + \frac{(-at)^1}{1!} + \frac{(-at)^2}{2!} + \frac{(-at)^3}{3!} + \cdots\right\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

この形の無限級数は底を自然定数eとする指数関数となり，次式を与える．

$$x(t) = x(0)\exp[-at] \tag{2.6}$$

上に与えた式(2.5)での計算から次の事柄が分る．

(a)マクローリン展開の公式(2.5)から， $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0), \dddot{x}(0), \cdots$の値が与えられれば，任意の$t$における$x(t)$の値は決まる．

(b)問題としている微分方程式$\dot{x} + ax = 0$を使うと， $\dot{x}(0), \ddot{x}(0), \dddot{x}(0), \cdots$の値は$x(0)$から順次決定されていく．

(c)従って，$\dot{x}+ax=0$の解$x(t)$は$x(0)$の値が決まれば，完全に決定される．

初期値問題の説明に関連して“$t=0$でのxに関する値（初期値）をもとにして”と述べた．上にまとめた事柄から，もとにすべき初期値についての知見が得られる．(a)は微積分の基本であるマクローリン展開の内容を述べているに過ぎない．大切なのは，(b)と(c)である．この(b)と(c)から微分方程式が$\dot{x}+ax=0$のとき，解を特定するのに必要とされる初期値は$x(0)$であることが分る．以前に求めた式(2.3)での不定定数は$A=x(0)$となる．

それでは微分方程式が 2 階の$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$であればどうか．$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$を$\ddot{x}=-a\dot{x}-bx$と見直すと，$\ddot{x}(0)$は$\dot{x}(0)$と$x(0)$によって決まる．続いて$\ddot{x}=-a\dot{x}-bx$を微分すると，$\dddot{x}=-a\ddot{x}-b\dot{x}$となる．これより，$\dddot{x}(0)$は$\ddot{x}(0)$と$\dot{x}(0)$から決まる．$\ddot{x}(0)$は$\dot{x}(0)$と$x(0)$で与えられるので，結局の所，$\dddot{x}(0)$は$\dot{x}(0)$と$x(0)$から決まる．同様な操作を続けていけば，$x$の高階微分の$t=0$における値は$\dot{x}(0)$と$x(0)$から決まる．従って，必要とされる初期値が$\dot{x}(0)$と$x(0)$であると言える．上と同様な論法を用いると，$n$階の微分方程式の初期値問題には$x(0), x^{(1)}(0), x^{(2)}(0)$,・・・，$x^{(n-1)}(0)$の初期値が必要となることが予見できる．ここで$x^{(i)}(0)$は$i$階の微分を意味する．

2.2　1 階線形定数係数非同次方程式

次に非同次方程式を問題にしよう．非同次の微分方程式$\dot{x}+ax=f(t)$の解を求める一つ手法は，定数変化法である．定数変化法では，非同次方程式$\dot{x}+ax=f(t)$の解が同次方程式$\dot{x}+ax=0$に似ていると予想して，同次方程式の解に含まれる定数を関数と見直すことにより，その解の形を特定する．この手法が総ての場合に効力を発揮するわけでないが，今取り上げている非同次方程式$\dot{x}+ax=f(t)$には使える．

同次方程式$\dot{x}+ax=0$の解が$x(t)=A\exp[-at]$となることは，以前に説明済みである．定数変化法では不定定数Aをtの関数とみなすので，$x(t)$を次の形に仮定する．

$$x(t)=A(t)\exp[-at] \tag{2.7}$$

従って求める関数が$A(t)$となる．(2.7)式の$x(t)$を微分すると

$$\dot{x}(t)=\dot{A}(t)\exp[-at]-aA(t)\exp[-at]$$

となる．これを微分方程式$\dot{x}+ax=f(t)$に代入して整理すると，次式を得る．

$$\dot{A}(t)\exp[-at]=f(t)$$

これより次式となる．

$$\dot{A}(t)=f(t)\exp[at] \tag{2.8}$$

この(2.8)式を積分して，次式を得る．

$$A(t)=\int_0^t dt' f(t')\exp[at']+A_0 \tag{2.9}$$

ここでA_0は不定定数である．この(2.9)式を$x(t)=A(t)\exp[-at]$に代入して，

$$\begin{aligned}x(t)&=\left(\int_0^t dt' f(t')\exp[at']+A_0\right)\exp[-at]\\&=A_0\exp[-at]+\exp[-at]\int_0^t dt' f(t')\exp[at']\\&=A_0\exp[-at]+\int_0^t dt' f(t')\exp[-a(t-t')]\end{aligned} \tag{2.10}$$

となり，$\dot{x}+ax=f(t)$の解の表式が得られる．この解の表式で現れる不定定数A_0は$x(0)$の値を与えると，決まる．(2.10)式で$t=0$とすれば，第 2 項において積分の上限と下限がともに 0 となり，積分は値を持たない．従って同次方程式の場合と同様に，不定定数は$x(0)$から決まり，

$$A_0=x(0) \tag{2.11}$$

となる．

上で求めた 1 階線形定数係数非同次方程式の解の形(2.10)はしっかりと記憶しておいてもらいたい．次

に対象とする 2 階線形定数係数の微分方程式の解を求める際に使用するからである．2 階線形定数係数の微分方程式の解法にも色々あるが，ここでは 1 階線形定数係数非同次方程式の解を経由して，その解を導出するからである．

微分方程式の解

- $\dot{x}+ax=f(t)$の解

$$x(t)=A_0\exp[-at]+\int_0^t dt' f(t')\exp[-a(t-t')]$$
$$=x(0)\exp[-at]+\int_0^t dt' f(t')\exp[-a(t-t')]$$

2.3　線形とは

線形性を $\dot{x}+ax=f(t)$ を例に説明する． $\dot{x}+ax=f(t)$ の形をした微分方程式で，右辺の関数（非同次項）が $f_1(t)$ と $f_2(t)$ である場合の解をそれぞれ $x_1(t)$ と $x_2(t)$ とする．すると $x_1(t)$ と $x_2(t)$ はそれぞれ次式を満たす．

$$\dot{x}_1+ax_1=f_1(t)$$
$$\dot{x}_2+ax_2=f_2(t)$$

非同次項が $f_1(t)+f_2(t)$ であるときの解を $x(t)$ とすると， $x(t)$ は次の微分方程式をみたす．

$$\dot{x}+ax=f_1(t)+f_2(t)$$

この微分方程式の解が次のように表せると，線形性が成立するという．

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

微分方程式 $\dot{x}+ax=f(t)$ で， $x(t)$ をある体系の状態を表す変数， $f(t)$ をその状態を変動させようとする駆動力と考えてみる．線形性とは，2 つの異なる駆動力が同時に作用した（ $f_1(t)+f_2(t)$）ときに実現される状態が個別の駆動力で実現される状態の重ね合わせ（ $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$）となること，と言える．事実，上の例では線形性が成立する．何故なら

$$\frac{d}{dx}\left(x_1(t)+x_2(t)\right)+a\left(x_1(t)+x_2(t)\right)=\left\{\dot{x}_1(t)+ax_1(t)\right\}+\left\{\dot{x}_2(t)+ax_2(t)\right\}$$
$$=f_1(t)+f_2(t)$$

となるからである．

それでは線形性が成立しない場合を示す．微分方程式が $\dot{x}+ax^2=f(t)$ であるとしてみる．非同次項が $f_1(t)$ と $f_2(t)$ である場合の解を各々 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ とする．

$$\dot{x}_1+a{x_1}^2=f_1(t)$$
$$\dot{x}_2+a{x_2}^2=f_2(t)$$

このとき $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の重ね合わせである $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ は，もはや $\dot{x}+ax^2=f_1(t)+f_2(t)$ を満たさない．

$$\frac{d}{dx}\left(x_1(t)+x_2(t)\right)+a\left(x_1(t)+x_2(t)\right)^2=\left\{\dot{x}_1+a{x_1}^2\right\}+\left\{\dot{x}_2+a{x_2}^2\right\}+2ax_1x_2$$
$$\neq f_1(t)+f_2(t)$$

$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の積が現れるからである．この例から $\dot{x}+ax=f(t)$ を線形微分方程式と呼ぶことが理解できるであろう．

ついでながら， $\dot{x}+ax=f(t)$ で a が独立変数 t の関数であっても線形性は保障される．これは諸君自身で確

かめておいてもらいたい．ここではaを定数としているので，$\dot{x}+ax=f(t)$を 1 階線形定数係数の微分方程式を呼ぶのである．

3　2 階線形定数係数微分方程式の解法

3.1　同次方程式

3.1.1　準備

最初に同次型の微分方程式$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$を対象にする．この形の微分方程式を解くにあたって準備をしておこう．微分方程式の解を求めるという目標には少し的外れのようであるが，次の問題に対する解答を考えてもらいたい．

『$m_1+m_2=-a$および$m_1m_2=b$となる 2 つの数m_1, m_2を求めよ.』

m_1とm_2は次に示す 2 次方程式の解となる．

$$m^2+am+b=0 \tag{3.1}$$

これは解と係数の関係式から明らかである．それでは$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$の係数を，m_1, m_2を用いて書き直してみる．

$$\ddot{x}-(m_1+m_2)\dot{x}+m_1m_2x=0 \tag{3.2}$$

この微分方程式は次のように変形できる．

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}-m_2x\right)-m_1\left(\dot{x}-m_2x\right)=0 \tag{3.3}$$

3.1.2　新しい変数を導入して 1 階線形定数係数微分方程式へ

新しい変数yを次の形で導入する．

$$y=\dot{x}-m_2x \tag{3.3}$$

すると元の微分方程式$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$は式(3.3)を参考にして，1 階の線形定数係数微分方程式

$$\dot{y}-m_1y=0 \tag{3.4}$$

となる．この微分方程式の解は以前の議論より，Aを不定定数として

$$y=A\exp[m_1t] \tag{3.5}$$

となる．

3.1.3　同次方程式

新しい変数yの形が定まっても，$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$が解けたことにはならない．最終的に求めたいのはxなのである．xとyの関係は$y=\dot{x}-m_2x$なので，これに$y=A\exp[m_1t]$を代入すると

$$\dot{x}-m_2x=A\exp[m_1t] \tag{3.6}$$

となり，xに関する 1 階線形定数係数非同次方程式を得る．この形の微分方程式が定数変化法で解けることは，以前に示しておいた．定数変化法をトレースしてみよう．

同次方程式$\dot{x}-m_2x=0$の解はBを不定定数として，$B\exp[m_2t]$である．従って，定数変化法では解を次のように仮定する．

$$x(t)=B(t)\exp[m_2t] \tag{3.7}$$

この形を微分方程式$\dot{x}-m_2x=A\exp[m_1t]$に代入する．

$$\dot{x}(t)=\dot{B}(t)\exp[m_2t]+m_2B(t)\exp[m_2t]$$

なので，代入した結果は

$$\dot{B}(t)\exp[m_2t]=A\exp[m_1t]$$

となる．従って，

$$\dot{B}(t)=A\exp[(m_1-m_2)t] \tag{3.8}$$

となる．

関係式 $\dot{B}(t)=A\exp[(m_1-m_2)t]$ より $B(t)$ を求めることは容易であるが，注意を要する．すなわち，$m_1\neq m_2$ と $m_1=m_2$ の場合を区別しなければならない．$m_1\neq m_2$ であれば $\exp[(m_1-m_2)t]$ は指数関数のままであるが，$m_1=m_2$ であれば $\exp[(m_1-m_2)t]$ は指数関数とならず単なる定数 1 となるからである．

【（$m_1\neq m_2$）の場合】

$\dot{B}(t)=A\exp[(m_1-m_2)t]$ より，B_0 を不定定数として

$$B(t)=\frac{A}{m_1-m_2}\exp[(m_1-m_2)t]+B_0$$

となる．この形を $x=B(t)\exp[m_2t]$ に代入して整理すると，

$$x(t)=\frac{A}{m_1-m_2}\exp[m_1t]+B_0\exp[m_2t]$$

となる．A は不定定数なので，$A/(m_1-m_2)$ も不定定数となる．新しく不定定数を C_1 と C_2 として，$x(t)$ は次式で与えられる．

$$x(t)=C_1\exp[m_1t]+C_2\exp[m_2t] \tag{3.9}$$

以前に微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ の解を特定するには，$x(0)$ と $\dot{x}(0)$ が必要であることを示しておいた．(3.9)式を微分して次式が得られる．

$$\dot{x}(t)=m_1C_1\exp[m_1t]+m_2C_2\exp[m_2t]$$

これらの $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ に対する表式を利用して，不定定数を C_1 と C_2 を決定するための関係式は次式となる．

$$\begin{aligned}x(0)&=C_1+C_2\\ \dot{x}(0)&=m_1C_1+m_2C_2\end{aligned} \tag{3.10}$$

C_1 と C_2 の具体的な表式を求める操作は諸君に委ねる．

【（$m_1=m_2$）の場合】

$m_1=m_2$ であれば，(3.8)式は $\dot{B}(t)=A$ となる．従って，

$$B(t)=At+B_0$$

である．これを $x=B(t)\exp[m_2t]$ に代入して

$$x(t)=\left(At+B_0\right)\exp[m_2t]$$

となる．不定定数を C_1 と C_2 に書き直すと，

$$x(t)=\left(C_1t+C_2\right)\exp[m_2t] \tag{3.11}$$

となる．

不定定数 C_1 と C_2 を決定するためには，$\dot{x}(t)$ が必要となる．(3.11)式を微分して次式を得る．

$$\dot{x}(t)=C_1\exp[m_2t]+m_2\left(C_1t+C_2\right)\exp[m_2t]$$

これより，C_1 と C_2 を決定するための関係式は次式となる．

$$\begin{aligned}x(0)&=C_2\\ \dot{x}(0)&=C_1+m_2C_2\end{aligned} \tag{3.12}$$

C_1 と C_2 の具体的な表式を求める操作は諸君に委ねる．

3.2　非同次方程式

3.2.1　不定定数を含んだ非同次方程式の解

非同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ に対しても(3.3)式を導いたのと同様な手法を適用してみる．$m^2+am+b=0$ の解 m_1,m_2 を用いて，$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}-m_2x\right)-m_1\left(\dot{x}-m_2x\right)=f(t)$$

と変形できる．新しい変数 y を $y=\dot{x}-m_2x$ として，この非同次方程式は次式となる．

$$\dot{y}-m_1 y=f(t)$$

この形の微分方程式の解は，以前の結果(2.10)を用いて書き下せる．

$$y(t)=A\exp[m_1 t]+\int_0^t dt' f(t')\exp[m_1(t-t')]$$

この y を $y=\dot{x}-m_2 x$ に代入すると， x に関する 1 階の非同次微分方程式を得る．

$$\dot{x}-m_2 x=A\exp[m_1 t]+\int_0^t dt' f(t')\exp[m_1(t-t')] \tag{3.13}$$

この形の微分方程式に，またも定数変化法を適用してみる．定数変化法では

$$x(t)=B(t)\exp[m_2 t] \tag{3.14}$$

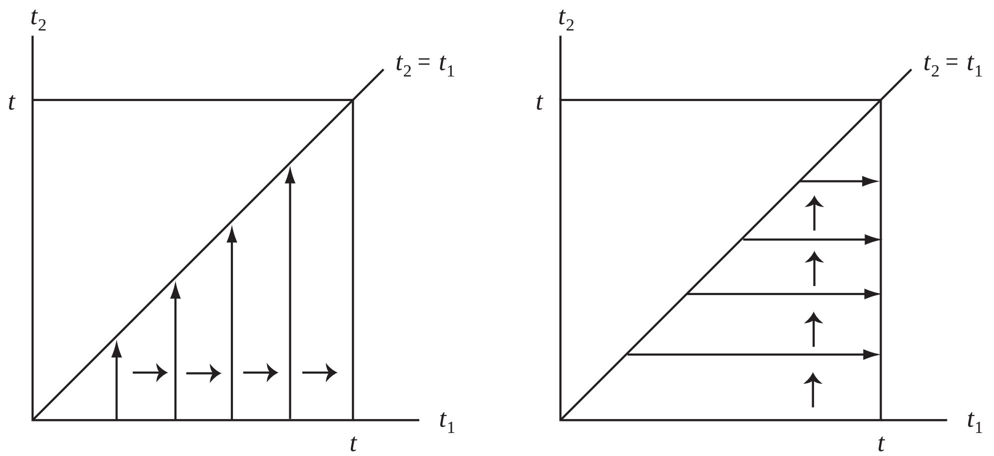
とおく． x を微分して，整理すると

$$\dot{B}(t)\exp[m_2 t]=A\exp[m_1 t]+\int_0^t dt' f(t')\exp[m_1(t-t')]$$

となる．これより $B(t)$ は次のように書ける．

$$B(t)=A\int_0^t dt_1\exp[(m_1-m_2)t_1]+\int_0^t dt_1\exp[(m_1-m_2)t_1]\int_0^{t_1} dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]+B_0 \tag{3.15}$$

上で得られた表式(3.14)で積分を実行できるところは，実行してみよう．第 1 項と第 2 項の積分はともに， $m_1\neq m_2$ と $m_1=m_2$ の場合分けが必要である．しかし第 1 の方の積分は容易である．面倒に見えるのは第 2 項である．第 2 項での 2 重積分では t_2 に関して区間 $[0,t_1]$ で積分を行なう．それから t_1 に関して区間 $[0,t]$ で積分するとの順序となっている．ここで積分範囲を考慮して，積分の順序を入れ替えてみる．



入れ替えた結果は次式となる．積分の順序は，最初に t_1 に関して区間 $[t_2,t]$ で積分し，次に t_2 に関して区間 $[0,t]$ で積分するとなる．

$$\int_0^t dt_1\exp[(m_1-m_2)t_1]\int_0^{t_1} dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]=\int_0^t dt_2\int_{t_2}^t dt_1\exp[(m_1-m_2)t_1]f(t_2)\exp[-m_1 t_2]$$

$$=\int_0^t dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]\int_{t_2}^t dt_1\exp[(m_1-m_2)t_1]$$

こうすると， t_1 に関しての被積分関数が $\exp[(m_1-m_2)t_1]$ となり，積分が具体的に実行できる．しかし，先ほど注意したように場合分けは必要である．

【($m_1\neq m_2$ ）の場合】

(3.15)式における第 2 項の積分は次式となる．

$$\int_0^t dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]\int_{t_2}^t dt_1 \exp[(m_1-m_2)t_1]$$
$$=\frac{1}{m_1-m_2}\left\{\int_0^t dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2+(m_1-m_2)t]-\int_0^t dt_2 f(t_2)\exp[-m_2 t_2]\right\}$$

(3.15)式の第 1 項の積分とあわせて， $x(t)=B(t)\exp(m_2 t)$ に代入すると，次式を得る．

$$x(t)=A\exp[m_1 t]+B_0\exp[m_2 t]$$
$$+\frac{1}{m_1-m_2}\left\{\int_0^t dt_2 f(t_2)\exp[m_1(t-t_2)]-\int_0^t dt_2 f(t_2)\exp[m_2(t-t_2)]\right\}$$

この表式で不定定数と積分変数を書き直し，対称性が分り易くなるように変形すると次式となる．

$$x(t)=C_1\exp(m_1 t)+C_2\exp(m_2 t)$$
$$+\frac{1}{m_1-m_2}\int_0^t dt' f(t')\exp[m_1(t-t')]+\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^t dt' f(t')\exp[m_2(t-t')] \tag{3.16}$$

【($m_1=m_2$) の場合】

この場合は $m_1\neq m_2$ の時よりは計算は簡単である． $m_1=m_2$ なので，(3.15)式は次式となる．

$$B(t)=A\,t+B_0+\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]$$

2 重積分からなる項で積分の順序を入れ替えれば，

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]=\int_0^t dt_2\int_{t_2}^t dt_1 f(t_2)\exp[-m_1 t_2]$$
$$=\int_0^t dt_2 (t-t_2) f(t_2)\exp[-m_1 t_2]$$

となる． $x=B(t)\exp[m_1 t]$ に以上の結果を代入し，不定定数や積分変数を書き換えると，次式を得る．

$$x(t)=(C_1 t+C_2)\exp[m_1 t]+\int_0^t dt' f(t')(t-t')\exp[m_1(t-t')] \tag{3.17}$$

微分方程式の解

- $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$

  m_1 と m_2 を 2 次方程式 $m^2+am+b=0$ の解とする．

  ($m_1\neq m_2$)

  $$x(t)=C_1\exp[m_1 t]+C_2\exp[m_2 t]$$
  $$+\frac{1}{m_1-m_2}\int_0^t dt' f(t')\exp[m_1(t-t')]+\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^t dt' f(t')\exp[m_2(t-t')]$$

  ($m_1=m_2$)

  $$x(t)=(C_1 t+C_2)\exp[m_1 t]+\int_0^t dt' f(t')(t-t')\exp[m_1(t-t')]$$

3.2.2　不定定数の決め方

この節は微積分の少し厄介な計算を含んでいる．従って，未だ微積分の計算が得意でない諸君は読み飛ばしてもよい．ただし，次のことは憶えておいてもらいたい．

『非同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ において，必要とされる初期条件は $x(0)$ と $\dot{x}(0)$ である．不定定数をき

める関係式は同次方程式$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$の場合と同じとなり，$f(t)$は初期条件に関与しない.』

不定定数の決め方について説明しておく．$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$の解を特定するために必要な初期値はなにか，考えてみよう．取っ掛かりは以前と同様にマクローリン展開である．$x(0),\dot{x}(0),\ddot{x}(0),\dddot{x}(0),\cdots$の値が与えられれば，任意の$t$における$x(t)$の値は決まるのである．$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$を$\ddot{x}=-a\dot{x}-bx+f(t)$の形に書き直すと，$\ddot{x}(0)$以上の高階微分の値が$x(0)$と$\dot{x}(0)$，および$f(0),\dot{f}(0),\ddot{f}(0),\dddot{f}(0),\cdots$で与えられることが分る．$f$は与えられた関数なので，$f(0),\dot{f}(0),\ddot{f}(0),\dddot{f}(0),\cdots$は決まった値である．従って，同次方程式$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$の場合と同様に，$x(0)$と$\dot{x}(0)$が$x(t)$を特定するために必要となる．

解$x(t)$を，不定定数を含む形で求めたのであるが，$\dot{x}(0)$を指定するためには$\dot{x}(t)$を書き下す必要がでてくる．$m_1\neq m_2$，$m_1=m_2$何れの場合にも$x(t)$は次のような形の積分を含んでおり，

$$h(t)=\int_0^t dt'f(t')g(t-t')$$

これをtで微分しなければならない．微分の定義に戻れば

$$\begin{aligned}\dot{h}(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_0^{t+\Delta t}dt'f(t')g(t+\Delta t-t')-\int_0^t dt'f(t')g(t-t')\right\}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_t^{t+\Delta t}dt'f(t')g(t+\Delta t-t')+\int_0^t dt'f(t')g(t+\Delta t-t')-\int_0^t dt'f(t')g(t-t')\right\}\end{aligned}$$

となる．ここで積分区間$[0,t+\Delta t]$を$[t,t+\Delta t]$と$[0,t]$に分割した．微積分学でのテイラー展開の公式を利用すると，

$$g(t+\Delta t-t')=g(t-t')+\Delta t\,\dot{g}(t-t')+O(\Delta t^2)$$

となる．ここで$O(\Delta t^2)$はΔt^2以上で構成される項を意味する．また，積分についての平均値の定理

$$\int_\alpha^\beta dt'G(t')=(\beta-\alpha)G(\xi)\quad,\quad(\alpha<\xi<\beta)$$

を$G(t')=f(t')g(t+\Delta t-t')$として適用すると，$0<\theta<1$として

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\Delta t}dt'f(t')g(t+\Delta t-t')&=\Delta t\;f(t+\theta\Delta t)g(t+\Delta t-(t+\theta\Delta t))\\&=\Delta t\;f(t+\theta\Delta t)g(\Delta t-\theta\Delta t)\\&=\Delta t\;f(t)g(0)+O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

となる．これらの結果を代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\dot{h}(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_t^{t+\Delta t}dt'f(t')g(t+\Delta t-t')+\int_0^t dt'f(t')g(t+\Delta t-t')-\int_0^t dt'f(t')g(t-t')\right\}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\Delta t\;f(t)g(0)+O(\Delta t^2)+\int_0^t dt'f(t')\left\{g(t-t')+\Delta t\,\dot{g}(t-t')+O(\Delta t^2)\right\}-\int_0^t dt'f(t')g(t-t')\right\}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\Delta t\;f(t)g(0)+\Delta t\int_0^t dt'f(t')\dot{g}(t-t')+O(\Delta t^2)\right\}\\&=f(t)g(0)+\int_0^t dt'f(t')\dot{g}(t-t')\end{aligned}$$

【（$m_1\neq m_2$）の場合】

$m_1\neq m_2$の場合は解の表式(3.16)で$t=0$として，

$$x(0)=C_1+C_2$$

となる．また(3.16)式を微分して

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&\;m_1C_1\exp(m_1t)+m_2C_2\exp(m_2t)\\&+\frac{1}{m_1-m_2}\left\{f(t)+m_1\int_0^t dt'f(t')\exp[m_1(t-t')]\right\}\\&+\frac{1}{m_2-m_1}\left\{f(t)+m_2\int_0^t dt'f(t')\exp[m_2(t-t')]\right\}\end{aligned}$$

となり，

$$\dot{x}(0) = m_1 C_1 + m_2 C_2$$

となる．これは(3.10)式と同じである．

【（ $m_1 = m_2$ ）の場合】

解の表式(3.17)から

$$x(0) = C_2$$

また，(3.17)式を微分して

$$\dot{x}(t) = C_1 t \exp(m_1 t) + m_1 (C_1 t + C_2) \exp(m_1 t) + \int_0^t dt' f(t') \left\{1 + m_1 (t - t')\right\} \exp[m_1 (t - t')]$$

となり，これより

$$\dot{x}(0) = C_1 + m_1 C_2 \exp(m_1 t)$$

となる．これまた，同次方程式の場合と同じ結果(3.12)となる．

面倒な計算を行なったが，不定定数の決め方は同次方程式と同じとなる．大山鳴動してネズミ一匹もでてこなかったというところか！

4.　三角関数との関連

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ では，2 次方程式 $m^2 + am + b = 0$ の解 m_1 および m_2 が微分方程式の解 $x(t)$ の関数形を決めた．この m_1 と m_2 が複素解となる場合を取り上げてみる．

2 次方程式 $m^2 + am + b = 0$ の解が複素数となる場合は

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{\left|a^2 - 4b\right|}}{2} \tag{4.1}$$

として，その複素解は

$$m_1 = \alpha + j\beta \quad , \quad m_2 = \alpha - j\beta \tag{4.2}$$

となる．ここで，オイラーの公式を思い出してもらいたい．オイラーの公式は θ を実数として，次のような関係式であった．

$$\begin{aligned} \exp[j\theta] &= \cos\theta + j\sin\theta \\ \exp[-j\theta] &= \cos\theta - j\sin\theta \end{aligned} \tag{4.3}$$

この関係式を利用すると，

$$\begin{aligned} \exp[m_1 t] &= \exp[(\alpha + j\beta)\, t] = \exp[\alpha\, t] \exp[j\beta\, t] \\ &= \exp[\alpha\, t](\cos\beta\, t + j\sin\beta\, t) \end{aligned}$$

と書ける．もちろん

$$\begin{aligned} C_1 \exp[m_1 t] + C_2 \exp[m_2 t] &= C_1 \exp[\alpha\, t](\cos\beta\, t + j\sin\beta\, t) + C_2 \exp[\alpha\, t](\cos\beta\, t - j\sin\beta\, t) \\ &= \exp[\alpha\, t]\left\{(C_1 + C_2)\cos\beta\, t + j(C_1 - C_2)\sin\beta\, t\right\} \\ &= \left\{D_1 \cos\beta\, t + D_2 \sin\beta\, t\right\} \exp[\alpha\, t] \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．ここで不定定数を新しく， $D_1 = C_1 + C_2$ および $D_2 = j(C_1 - C_2)$ とした．また，

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' f(t') \exp[m_1 (t - t')] &= \int_0^t dt' f(t') \exp[(\alpha + j\beta)(t - t')] \\ &= \int_0^t dt' f(t') \exp[\alpha (t - t')]\left\{\cos\beta(t - t') + j\sin\beta(t - t')\right\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' f(t') \exp[m_2 (t - t')] &= \int_0^t dt' f(t') \exp[(\alpha - j\beta)(t - t')] \\ &= \int_0^t dt' f(t') \exp[\alpha (t - t')]\left\{\cos\beta(t - t') - j\sin\beta(t - t')\right\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

となる．これらの項を解の表式に代入すれば，三角関数で表された微分方程式の解が得られる．

【（ $m_1 \neq m_2$ ）の場合】

この場合は(3.16)式に(4.4)式から(4.6)式までの結果を適用して，次式となる．

$$x(t)=\left\{D_1\cos\beta t+D_2\sin\beta t\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{\beta}\int_0^t dt'f(t')\exp[\alpha(t-t')]\sin\beta(t-t') \tag{4.7}$$

【（$m_1=m_2$）の場合】

この場合は

$$x(t)=(C_1t+C_2)\exp(m_1t)+t\int_0^t dt'f(t')\exp[m_1(t-t')]-\int_0^t dt't'f(t')\exp[m_1(t-t')]$$

であり，以前のままで三角関数は現われない．何故なら m_1と m_2が複素解となる場合は必ず，$m_1\neq m_2$であるからである．

オイラーの公式から，次の関係式が導ける．

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\exp[j\theta]+\exp[-j\theta]}{2}\\ \sin\theta&=\frac{\exp[j\theta]-\exp[-j\theta]}{j2}\end{aligned} \tag{4.8}$$

これらの形に類似して，指数関数 $\exp[\theta]$と $\exp[-\theta]$を用いて次のように定義された関数を，双曲線関数という．

$$\begin{aligned}\cosh\theta&=\frac{\exp[\theta]+\exp[-\theta]}{2}\\ \sinh\theta&=\frac{\exp[\theta]-\exp[-\theta]}{2}\end{aligned} \tag{4.9}$$

三角関数と双曲線関数とは“親戚”である．$\theta\to j\theta$と形式的に関数の引数を置換すると，次のような関係式で結ばれる．

$$\begin{aligned}\cosh[j\theta]&=\frac{\exp[j\theta]+\exp[-j\theta]}{2}=\cos\theta\\ \sinh[j\theta]&=\frac{\exp[j\theta]-\exp[-j\theta]}{2}=j\sin\theta\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\cos(j\theta)&=\frac{\exp[j^2\theta]+\exp[-j^2\theta]}{2}=\frac{\exp[\theta]+\exp[-\theta]}{2}=\cosh\theta\\ \sin(j\theta)&=\frac{\exp[j^2\theta]-\exp[-j^2\theta]}{j2}=-\frac{\exp[\theta]+\exp[-\theta]}{j2}=j\sinh\theta\end{aligned} \tag{4.11}$$

$\theta\to j\theta$の置換で三角関数は双曲線関数に，双曲線関数は三角関数にその形を変える．それでは，$\theta\to -j\theta$と置換したときはどうなるのか，諸君自身で調べておいてもらいたい．

2 次方程式 $m^2+am+b=0$が 2 実解を持つ場合には，$m_1=\alpha+j\beta, m_2=\alpha-j\beta$
に代えて

$$m_1=\alpha+\beta, m_2=\alpha-\beta$$

とすれば良い．$m_1=\alpha+j\beta, m_2=\alpha-j\beta$で $\beta\to -j\beta$と置換すれば良いのである．この置換を(4.7)式で行なうと，

$$x(t)=\left\{D_1\cos(-j\beta t)+D_2\sin(-j\beta t)\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{-j\beta}\int_0^t dt'f(t')\exp[\alpha(t-t')]\sin\left(-j\beta(t-t')\right)$$

となり，

$$x(t)=\left\{D_1\cosh\beta t-jD_2\sinh\beta t\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{\beta}\int_0^t dt'f(t')\exp[\alpha(t-t')]\sinh\beta(t-t')$$

となる．ここで，D_1や D_2は不定定数なので，$-jD_2$新しく D_2と書き直して，

$$x(t)=\left\{D_1\cosh\beta t+D_2\sinh\beta t\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{\beta}\int_0^t dt'f(t')\exp[\alpha(t-t')]\sinh\beta(t-t') \tag{4.12}$$

となる．

置換を $\beta\to j\beta$としても，同様な結果が得られることを，諸君自身で確かめておいてもらいたい．理由も考

えておいてもらいたい.

微分方程式の解（三角関数を用いると）

- $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$

（2 次方程式 $m^2+am+b=0$ が異なる 2 実解を持つとき. $m=\alpha\pm\beta$）

$$x(t)=\left\{D_1\cosh\beta t+D_2\sinh\beta t\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{\beta}\int_0^t dt' f(t')\exp[\alpha(t-t')]\sinh\beta(t-t')$$

（2 次方程式 $m^2+am+b=0$ が異なる 2 複素解を持つとき. $m=\alpha\pm j\beta$）

$$x(t)=\left\{D_1\cos\beta t+D_2\sin\beta t\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{\beta}\int_0^t dt' f(t')\exp[\alpha(t-t')]\sin\beta(t-t')$$

（2 次方程式 $m^2+am+b=0$ が重解を持つとき. $m=\alpha$）

$$x(t)=(C_1t+C_2)\exp[m_1t]+\int_0^t dt' f(t')(t-t')\exp[m_1(t-t')]$$

5.　解を求めるための積分

2 階までの線形定数係数の微分方程式で非同次項 $f(t)$ が具体的に与えられたとき，解の公式を利用して解の形を定めるためには,

$$\int_0^t dt' f(t')\exp[\alpha t']$$

に類した積分を実行する必要に迫られる. 微分方程式 $\dot{x}+ax=f(t)$ や $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を典型的な現象に適用し，その現象を解析する際に現れる $f(t)$ は複雑な形をしていない. そのようなとき，上の積分は解析的に実行できる場合が多い.

5.1　多項式の場合　$f(t)=t^n$

先ず，次の形の積分を取り上げる. n は負でない整数とする. $n=0,1,2,3,\cdots$.

$$\int_0^t dt' t'^n\exp[\alpha t']$$

この形の積分は部分積分の公式を繰り返し使うことによっても実行できるが，ここでは少しテクニカルな手法を紹介しておく.

問題とする積分を次のように書くことにする.

$$I_n(t,\alpha)=\int_0^t dt' t'^n\exp[\alpha t']$$

$I_n(t,\alpha)$ と，問題とする積分を t と α の関数とみなすのである. t は積分の上限を指定する変数であり，α は被積分関数の一部である指数関数を指定するパラメータとする. $n=0$ の場合は単なる指数関数の積分なので,

$$I_0(t,\alpha)=\int_0^t dt'\exp[\alpha t']$$

となる.

$I_0(t,\alpha)$ を α で微分してみる. 独立変数を 2 個以上含む関数を一つの独立変数で微分する操作は偏微分と呼ばれ，偏微分には記号 ∂ が使われる.「$I_0(t,\alpha)$ を α で微分してみる.」とは，正確には $I_0(t,\alpha)$ を α で偏微分

してみる，とのことなのである．

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}I_0(t,\alpha)=\int_0^t dt't'\exp[\alpha t']=I_1(t,\alpha)$$

αでの偏微分の回数を増やしていくと，

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}I_0(t,\alpha)=\int_0^t dt't'^2\exp[\alpha t']=I_2(t,\alpha)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}I_0(t,\alpha)=\int_0^t dt't'^3\exp[\alpha t']=I_3(t,\alpha)$$

$$\vdots$$

これらの関係式は，$I_0(t,\alpha)$の形が分ればそれをαで偏微分すると順次，$I_1(t,\alpha)$，$I_2(t,\alpha)$などが得られることを示している．

$I_0(t,\alpha)$は単なる指数関数の積分なので，簡単に実行できる．

$$I_0(t,\alpha)=\frac{1}{\alpha}(\exp[\alpha t]-1)=\frac{1}{\alpha}\exp[\alpha t]-\frac{1}{\alpha}$$

先の関係式を使うと$I_1(t,\alpha)$，$I_2(t,\alpha)$などは$I_0(t,\alpha)$をαで偏微分して得られる．

$$\begin{aligned}I_1(t,\alpha)&=\frac{\partial}{\partial\alpha}I_0(t,\alpha)=-\alpha^{-2}\exp[\alpha t]+t\alpha^{-1}\exp[\alpha t]+\alpha^{-2}\\&=\frac{1}{\alpha^2}\left\{-1+\alpha t\right\}\exp[\alpha t]+\frac{1}{\alpha^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2(t,\alpha)&=\frac{\partial}{\partial\alpha}I_1(t,\alpha)=2\alpha^{-3}\exp[\alpha t]-t\alpha^{-2}\exp[\alpha t]-t\alpha^{-2}\exp[\alpha t]+t^2\alpha^{-1}\exp[\alpha t]-2\alpha^{-3}\\&=\frac{2}{\alpha^3}\exp[\alpha t]-\frac{2t}{\alpha^2}\exp[\alpha t]+\frac{t^2}{\alpha}\exp[\alpha t]-\frac{2}{\alpha^3}\\&=\frac{1}{\alpha^3}\left\{2-2t\alpha+\alpha^2t^2\right\}\exp[\alpha t]-\frac{2}{\alpha^3}\end{aligned}$$

5.2　三角関数　$f(t)=\cos\omega t$ ， $f(t)=\sin\omega t$

次のタイプの積分はオイラーの公式を利用する方が計算に間違いが少なくなる．

$$\int_0^t dt'\cos\omega t'\exp[\alpha t'] \quad , \quad \int_0^t dt'\sin\omega t'\exp[\alpha t']$$

オイラーの公式から

$$\exp[j\omega t']=\cos\omega t'+j\sin\omega t'$$

従って，

$$\begin{aligned}\int_0^t dt'\exp[j\omega t']\exp[\alpha t']&=\int_0^t dt'\left(\cos\omega t'+j\sin\omega t'\right)\exp[\alpha t']\\&=\int_0^t dt'\cos\omega t'\exp[\alpha t']+j\int_0^t dt'\sin\omega t'\exp[\alpha t']\end{aligned}$$

となり，αが実数である限り

$$\int_0^t dt'\cos\omega t'\exp[\alpha t']=\mathrm{Re}\int_0^t dt'\exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$

$$\int_0^t dt'\sin\omega t'\exp[\alpha t']=\mathrm{Im}\int_0^t dt'\exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$

となる．要するに，

$$\int_0^t dt'\exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$

を計算してその実数部と虚数部をとれば，所望の積分が得られる．

指数関数の積分は容易であり，

$$\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t'] = \int_0^t dt' \exp[(\alpha + j\omega)t']$$
$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}\left(\exp[(\alpha + j\omega)t] - 1\right)$$
$$= \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\left\{\exp[\alpha t]\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) - 1\right\}$$
$$= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}\left[\left\{\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right\}\exp[\alpha t] - \alpha\right]$$
$$+ j\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}\left[\left\{-\omega\cos\omega t + \alpha\sin\omega t\right\}\exp[\alpha t] + \omega\right]$$

となる．従って，実数部と虚数部をとって

$$\int_0^t dt' \cos\omega t' \exp[\alpha t'] = \mathrm{Re}\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$
$$= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}\left[\left\{\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right\}\exp[\alpha t] - \alpha\right]$$
$$\int_0^t dt' \sin\omega t' \exp[\alpha t'] = \mathrm{Im}\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$
$$= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}\left[\left\{-\omega\cos\omega t + \alpha\sin\omega t\right\}\exp[\alpha t] + \omega\right]$$

となる．

三角関数と多項式の積で $f(t)$ が与えられる場合，例えば $f(t') = t'^n \sin\omega t'$ のような場合も，上の積分公式をもとにして積分の値を求めることができる．この節で最初に問題とした積分

$$\int_0^t dt' \cos\omega t' \exp[\alpha t'] \quad , \quad \int_0^t dt' \sin\omega t' \exp[\alpha t']$$

を α で微分すると次式となる．

$$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\int_0^t dt' \cos\omega t' \exp[\alpha t'] = \int_0^t dt'\ t'^n \cos\omega t' \exp[\alpha t']$$
$$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\int_0^t dt' \sin\omega t' \exp[\alpha t'] = \int_0^t dt'\ t'^n \sin\omega t' \exp[\alpha t']$$

従って，次式を得る．

$$\int_0^t dt'\ t'^n \cos\omega t' \exp[\alpha t'] = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\mathrm{Re}\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$
$$\int_0^t dt'\ t'^n \sin\omega t' \exp[\alpha t'] = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\mathrm{Im}\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$$

この式の右辺は $\mathrm{Re}\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$ と $\mathrm{Im}\int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[\alpha t']$ の表式を α で微分して求めることができるのである．しかし，微分の階数が多くなると大変である．

三角関数と指数関数の積で $f(t)$ が与えられる場合，例えば $f(t') = \exp[\gamma t]\sin\omega t'$ である場合は，オイラーの関係式を利用すると簡単に求められる．まず，次のような積分を考えればよい．

$$\int_0^t dt' \exp[\gamma t']\exp[j\omega t']\exp[\alpha t'] = \int_0^t dt' \exp[(\gamma + j\omega)t']\exp[\alpha t']$$

この積分は

$$\int_0^t dt' \exp[(\gamma + j\omega)t']\exp[\alpha t'] = \int_0^t dt' \exp[j\omega t']\exp[(\alpha + \gamma)t']$$

と書ける．従って，ことさら積分を新しく実行しなくても，この節で最初に問題とした積分で $\alpha \to \alpha + \gamma$ と見直せば事足りる．あとは実数部と虚数部を取り出せば， $f(t') = \exp[\gamma t]\cos\omega t'$ と $f(t') = \exp[\gamma t]\sin\omega t'$ に対する積分が得られる．

6.　特解を重ねる解法

6.1　線形性

微分方程式 $\dot{x}+ax=f(t)$ と $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ に対して，積分を用いた解の公式を導いた． $f(t)$ が具体的に与えられたときはその解の公式で積分を実行して，解を求めることができる．しかし，解の公式での積分は結構やっかいである．ここでは解の公式を用いないで，線形性を利用して非同次微分方程式の解を求める手法を， $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を対象にして紹介する．

線形の非同次微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ の解を 2 つに分解する．一つは同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ を満たす一般解．これを $x_0(t)$ とする．この $x_0(t)$ は同次解と呼ばれる．他方を非同次微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を満たす一つの解．すなわち特解．これを $x_1(t)$ とする．ここで一般解とは，どんな初期条件にも対応できるように必要な数だけの不定定数を含んだ解を指す．今問題にしている微分方程式は 2 階なので，不定定数の数は 2 となる．それに対して特解とは，不定定数を含まず，微分方程式が要求する関係だけを満たす解である． $x_0(t)$ と $x_1(t)$ は次の関係を満たすことになる．

$$\ddot{x}_0+a\dot{x}_0+bx_0=0 \tag{6.1}$$

$$\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=f(t) \tag{6.2}$$

このとき，２つの解の重ね合わせ $x_0(t)+x_1(t)$ は $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を満たす． $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ として，この $x(t)$ を微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ に代入してみると，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(x_0+x_1\right)+a\frac{d}{dt}\left(x_0+x_1\right)+b\left(x_0+x_1\right)&=\ddot{x}_0+\ddot{x}_1+a\left(\dot{x}_0+\dot{x}_1\right)+b\left(x_0+x_1\right)\\&=\left\{\ddot{x}_0+a\dot{x}_0+bx_0\right\}+\left\{\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1\right\}\\&=0+f(t)\\&=f(t)\end{aligned} \tag{6.3}$$

従って， $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ は微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を満たすことが分る．ここで， $x_1(t)$ は単に(6.2)式を満足する特解でよいとしているところが大切である．同次方程式の解である一般解 $x_0(t)$ （同次解）は簡単に書き下せる．以前の議論より， $x_0(t)$ は 2 つの積分定数（不定定数）を含むので， $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ も 2 つの不定定数を含む．従って， $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ は非同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ の一般解となる．

同次方程式の一般解に対する公式(3.16)と(3.17)との関連について述べておく．公式(3.16)と(3.17)を眺めてみよう．それらの公式は 2 つの不定定数を含む同次解と，非同次項 $f(t')$ の関与している項の和で表現されている．後者は不定定数を含まないので，特解と言える．

$$x_1(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{m_1-m_2}\displaystyle\int_0^t dt' f(t')\exp[m_1(t-t')]+\dfrac{1}{m_2-m_1}\int_0^t dt' f(t')\exp[m_2(t-t')] & (m_1\neq m_2)\\[2ex] \displaystyle\int_0^t dt' f(t')(t-t')\exp[m_1(t-t')] & (m_1=m_2)\end{cases} \tag{6.4}$$

従って，非同次項 $f(t')$ を被積分関数とする項は特解を与える一つの公式である．ただし，この特解は同次解に含まれる関数を含んでいる．このことは $f(t)$ として簡単な関数を選んで，積分を具体的に実行してみると分る．例えば $f(t)=\exp[-3t]$ と選び，微分方程式を $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\exp[-3t]$ としてみる．同次解は $x_0(t)=C_1\exp[-2t]+C_2\exp[-t]$ となる．上に示した表式(6.4)で積分を実行して，得られた表式に $\exp[-2t]$ と $\exp[-t]$ が含まれることを確認する作業は諸君に委ねる．

$x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ が非同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ の一般解となることが分った．しかし，特解 $x_1(t)$ としては単に $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ だけを満たし，かつ同次解とは異なる形となる関数をひとつ選びだせば事足りる．そのような特解は，工学で頻出する場合については視察で形が予想できる．視察で特解の形を限定し，少しの計算でその形を厳密に決めればよい．この解法の方が解の公式を用いて積分を行ないより，断然，簡便である．

6.2　多項式の場合

最初に $f(t)$ が定数の場合を取り上げる．

$$f(t)=A \tag{6.5}$$

やらなければならない仕事は

$$\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=A \tag{6.6}$$

を満たす一つの $x_1(t)$ を探し出すことである．

多項式の微分を知っている諸君にとってこの仕事は容易である．単なる定数でよい． B を定数として，

$$x_1(t)=B$$

とすれば事足りる．何故なら $\dot{x}_1(t)=\ddot{x}_1(t)=0$ なので， $x_1(t)=B$ を $\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=A$ に代入して整理すると

$$B=\frac{A}{b}$$

を得る．ただし， $B=A/b$ となるためには $b\neq 0$ でなければならない．この $b\neq 0$ のもとでは， $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=A$ の解として，次式を得る．

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)=x_0(t)+\frac{A}{b} \tag{6.7}$$

ここで同次方程式の解 $x_0(t)$ は，2 次方程式 $m^2+am+b=0$ が持つ解の形態に応じて書き下す必要がある．

$b=0$ であれば， $x_1(t)$ が満たす微分方程式は次式となる．

$$\ddot{x}_1+a\dot{x}_1=A \tag{6.8}$$

これを満たす $x_1(t)$ の形も一見して想像がつく．

$$x_1(t)=Bt \tag{6.9}$$

$x_1(t)=Bt$ とすれば $\dot{x}_1(t)=B$，そして $\ddot{x}_1(t)=0$ である．従って，この場合は

$$B=\frac{A}{a}$$

となる．今の場合は $b=0$ としているの，2 次方程式 $m^2+am+b=0$ は $m^2+am=0$ となって，解は 0 と $-a$ となる．従って，

$$x_0(t)=C_1+C_2\exp[-at]$$

となるので， $\ddot{x}+a\dot{x}=A$ の一般解は次式で与えられる．

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)=x_0(t)=C_1+C_2\exp[-at]+\frac{A}{a}t \tag{6.10}$$

それでは $f(t)=A_1t+A_0$ の場合を取り上げる． $x_1(t)$ は次式を満たす．

$$\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=A_1t+A_0$$

さて，多項式に関するいくつかの性質を思い浮かべてもらいたい．(i)多項式を微分すると，次数が一つ下がる．(ii)次数の異なる多項式どうしの和は多項式となるが，和で得られた多項式の次数はもともとの多項式の内で高い次数で与えられる．これらの性質から， $x_1(t)$ として多項式を選ぶと， $\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1$ も多項式となることが分る．従って $\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1$ が 1 次式となるようにするには， $x_1(t)$ として選ぶ多項式は 1 次であればよい．

$$x_1(t)=B_1t+B_0 \tag{6.11}$$

これを $\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=A_1t+A_0$ に代入して整理すると，次式が得られる．

$$B_1t+\left(aB_1+B_0\right)=A_1t+A_0 \tag{6.12}$$

この関係式が恒等式であるとして， B_0 と B_1 に関する連立方程式を得る．

$$B_1=A_1 \quad , \quad aB_1+B_0=A_0 \tag{6.13}$$

この連立方程式を解いて B_0 と B_1 を求め，一般解を書き下すことは諸君に委ねる．

$f(t)=A_1t+A_0$ での論法は一般化できる．すなわち，

$$f(t)=A_nt^n+A_{n-1}t^{n-1}+\cdots+A_1t^1+A_0$$

であれば， $x_1(t)$ として次の形を仮定すればよい．

$$x_1(t) = B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \cdots + B_1 t^1 + B_0$$

この $x_1(t)$ を $\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + bx_1 = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t^1 + A_0$ に代入して，B_0 ～ B_n に関する連立方程式を導き，それを解けば B_0 ～ B_n が求められる．

6.3　指数関数の場合

$f(t)$ が指数関数であるとして，次式とする．

$$f(t) = A\exp[\gamma t] \tag{6.14}$$

特解 $x_1(t)$ は次の微分方程式を満たさなければならない．

$$\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + bx_1 = A\exp[\gamma t] \tag{6.15}$$

この微分方程式を満たす関数の概略形を予想することは容易である．その概略形は指数関数である．指数関数は何度微分してもその形を変えないからである．従って，

$$x_1(t) = B\exp[\gamma t] \tag{6.14}$$

と予想できる．$x_1(t)$ を一つに特定するためには B を決定しなければならない．$x_1(t) = B\exp[\gamma t]$ を微分方程式 $\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + bx_1 = A\exp[\gamma t]$ に代入して, B を決定するための関係式を得る．

$$\left(\gamma^2 + a\gamma + b\right) B\exp[\gamma t] = A\exp[\gamma t] \tag{6.16}$$

この関係式からから B をきめるに，少し注意を要する．

【（$\gamma \neq m_1, m_2$）の場合】

2 次方程式 $m^2 + am + b = 0$ の解を m_1 および m_2 として，$\gamma \neq m_1, m_2$ の場合は $\gamma^2 + a\gamma + b \neq 0$ なので，$\gamma^2 + a\gamma + b$ での割算が可能となる．

$$B = \frac{A}{\gamma^2 + a\gamma + b} \tag{6.17}$$

従って，$\gamma \neq m_1, m_2$ の場合は $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A\exp[\gamma t]$ の解として，次式を得る．

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + x_1(t) \\ &= x_0(t) + \frac{A}{\gamma^2 + a\gamma + b}\exp[\gamma t] \end{aligned} \tag{6.18}$$

ここで同次方程式の解 $x_0(t)$ は，2 次方程式 $m^2 + am + b = 0$ が持つ解の形態に応じて書き下す必要がある．

【（$\gamma = m_1 \text{ or } m_2$）かつ（$\gamma \neq -a/2$）の場合】

$\gamma = m_1 \text{ or } m_2$ の場合は別に考える必要がある．$\gamma^2 + a\gamma + b = 0$ となって，(6.16)式で $\gamma^2 + a\gamma + b$ での割算ができなくなるからである．正確には，$\gamma^2 + a\gamma + b = 0$ の場合には(6.16)式が成立しないというべきである．こんなときは，定数変化法を試してみるとよい．B を t の関数とみなそう．

$$x_1(t) = B(t)\exp[\gamma t] \tag{6.20}$$

すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} x_1(t) &= B(t)\exp[\gamma t] \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{B}(t)\exp[\gamma t] + \gamma B(t)\exp[\gamma t] \\ \ddot{x}_1(t) &= \ddot{B}(t)\exp[\gamma t] + 2\gamma\dot{B}(t)\exp[\gamma t] + \gamma^2 B(t)\exp[\gamma t] \end{aligned}$$

これを微分方程式 $\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + bx_1 = A\exp[\gamma t]$ に代入すると，

$$\ddot{B}(t)\exp[\gamma t] + 2\gamma\dot{B}(t)\exp[\gamma t] + a\dot{B}(t)\exp[\gamma t] + \left(\gamma^2 + a\gamma + b\right)B(t)\exp[\gamma t] = A\exp[\gamma t]$$

となる．$\gamma^2 + a\gamma + b = 0$ であることに注意して整理すると，

$$\ddot{B}(t) + \left\{2\gamma + a\right\}\dot{B}(t) = A \tag{6.21}$$

となる．この形の微分方程式は前節の多項式の場合に扱った．A は定数なので，(6.21)式の右辺は 0 次の多項式とみなせる．$\dot{B}(t)$ が 0 次の多項式（定数）として，$B(t)$ の形を特定すればよい．記号を読み替えて，

$$B(t) = B_1 t + B_0 \tag{6.22}$$

として，B_0 と B_1 を決めればよい．結果は次式となる．

$$B_1=\frac{A}{2\gamma+a} \tag{6.23}$$

ただし，B_0は不定のままで残る．特解$x_1(t)=B(t)\exp[\gamma t]$としては，単に$\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=A\exp[\gamma t]$を満たす一つの関数を選べばよいだけである．従って，不定となったB_0の値は何でもよい．$B_0=0$としておこう．このとき，$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=A\exp[\gamma t]$の解として，次式を得る．

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0(t)+x_1(t)=x_0(t)+B(t)\exp[\gamma t]\\&=x_0(t)+\frac{At}{2\gamma+a}\exp[\gamma t]\end{aligned} \tag{6.24}$$

ここで$x_0(t)$は同次解である．

$B_0=0$としてしまうことに違和感を覚える読者のために，説明を追加しておく．いま扱っている場合は$\gamma=m_1 \text{ or } m_2$ かつ $\gamma\neq -a/2$ である．丁寧に言い直すと，γは$m^2+am+b=0$の解と一致するので$\gamma^2+a\gamma+b=0$を満たす．従って$\gamma\neq -a/2$であれば，$\gamma^2+a\gamma+b=0$から$-\frac{1}{4}a^2+b\neq 0$となる．これは$m^2+am+b=0$が重解でないとの条件と同値である．$\gamma=m_1 \text{ or } m_2$としているので，$\gamma=m_2$としても一般性を失わない．このとき同次解$x_0(t)$は不定定数を$C_1$および$C_2$として

$$x_0(t)=C_1\exp[m_1t]+C_2\exp[m_2t]=C_1\exp[m_1t]+C_2\exp[\gamma t]$$

となる．この同次解にB_0を不定のままにした特解を加えて，非同次方程式の一般解を得る．

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0(t)+x_1(t)=x_0(t)+B(t)\exp[\gamma t]\\&=C_1\exp[m_1t]+C_2\exp[\gamma t]+\left(B_0+\frac{At}{2\gamma+a}\right)\exp[\gamma t]\\&=C_1\exp[m_1t]+\left(C_2+B_0\right)\exp[\gamma t]+\frac{At}{2\gamma+a}\exp[\gamma t]\end{aligned}$$

ここでC_2+B_0も不定定数となる．この不定定数を最初から一まとめにして扱えば，(6.24)式の形となる．同次解の中に現れる関数を含む形で特解を求めても，それらは同次解に“吸収”されてしまうのである．従って，特解としては同次解とは異なる関数形だけを問題にすればよい．

【（$\gamma=m_1 \text{ or } m_2$）かつ（$\gamma=-a/2$）の場合】

次に$m^2+am+b=0$が重解を持ち，かつその重解がγと一致するとの，特殊な場合を扱おう．このときはその重解は$-a/2$となるので，$\gamma=-a/2$と言い換えてもよい．すなわち$2\gamma+a=0$である．$x_1(t)=B(t)\exp[\gamma t]$を$\ddot{x}_1+a\dot{x}_1+bx_1=A\exp[\gamma t]$に代入した結果は

$$\ddot{B}(t)=A \tag{6.25}$$

となる．これを満たす関数$B(t)$を探すのは容易である．

$$B(t)=\frac{A}{2}t^2 \tag{6.26}$$

これより，

$$x_1(t)=B(t)\exp[\gamma t]=\frac{At^2}{2}\exp[\gamma t] \tag{6.27}$$

となる．従って，$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=A\exp[\gamma t]$の解として，次式を得る．

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0(t)+x_1(t)\\&=x_0(t)+\frac{At^2}{2}\exp[\gamma t]\end{aligned} \tag{6.28}$$

ただし，ここで

$$x_0(t)=(C_1t+C_2)\exp[-\frac{a}{2}t] \tag{6.29}$$

である．

6.4　三角関数の場合

$f(t)$が三角関数である場合は，電子工学の分野では特に重要であることを，最初に注意しておく．この場合はオイラーの公式を介して，虚数を含む指数関数で三角関数を表して処理する方が簡単である．

求めるべき特解を非同次項が $A_m\cos(\omega t+\theta)$と $A_m\sin(\omega t+\theta)$に対応して，それぞれ x_{c1}および x_{s1}とすると，x_{c1} および x_{s1} は次の微分方程式を満たす．ここで $\omega\neq 0$ としておく． $\omega=0$ であれば， $A_m\cos(\omega t+\theta)$と $A_m\sin(\omega t+\theta)$はともに定数となってしまうからである．

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{c1}+a\dot{x}_{c1}+bx_{c1}&=A_m\cos(\omega t+\theta)\\ \ddot{x}_{s1}+a\dot{x}_{s1}+bx_{s1}&=A_m\sin(\omega t+\theta)\end{aligned}\tag{6.30}$$

ここで，微分方程式に含まれるパラメータ（a，b，A_m，ω，θ）は全て実数とする．上に示した 2 番目の微分方程式に虚数単位jをかける．

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{c1}+a\dot{x}_{c1}+bx_{c1}&=A_m\cos(\omega t+\theta)\\ j\left(\ddot{x}_{s1}+a\dot{x}_{s1}+bx_{s1}\right)&=jA_m\sin(\omega t+\theta)\end{aligned}\tag{6.31}$$

そして辺々を加えてみると，次式を得る．ただし，オイラーの公式を使った．

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left\{x_{c1}+jx_{s1}\right\}+a\frac{d}{dt}\left\{x_{c1}+jx_{s1}\right\}+b\left\{x_{c1}+jx_{s1}\right\}&=A_m\left\{\cos(\omega t+\theta)+j\sin(\omega t+\theta)\right\}\\ &=A_m\exp[j(\omega t+\theta)]\\ &=A_m\exp[j\theta]\exp[j\omega t]\end{aligned}\tag{6.32}$$

ここで， x_cと x_sをひとまとめにして新しく X_1を導入する．

$$X_1=x_{c1}+jx_{s1}\tag{6.33}$$

この X_1は複素数である．異なった三角関数（ $A_m\cos(\omega t+\theta)$と $A_m\sin(\omega t+\theta)$）を非同次項にもつ場合の特解をひとまとめにして扱えるようになったところが，“味噌”である．一旦 X_1が得られると，非同次項が $A_m\cos(\omega t+\theta)$と $A_m\sin(\omega t+\theta)$に対応した x_{c1}および x_{s1}は

$$x_{c1}(t)=\mathrm{Re}\,X_1(t)\quad,\quad x_{s1}(t)=\mathrm{Im}\,X_1(t)\tag{6.34}$$

として取りだせる．

X_1を使うと，微分方程式(6.32)は次式となる．

$$\ddot{X}_1+a\dot{X}_1+bX_1=A\exp[j\omega t]\tag{6.35}$$

ただし，ここで

$$A=A_m\exp[j\theta]\tag{6.36}$$

とした．この形の微分方程式の特解は前節の指数関数の場合と同様に扱える．従って， X_1を次の形として予想できる．

$$X_1=B\exp[j\omega t]\tag{6.37}$$

ただし， Bは複素数である． $X_1=B\exp[j\omega t]$を $\ddot{X}_1+a\dot{X}_1+bX_1=A\exp[j\omega t]$に代入する．その際に，

$$\begin{aligned}\dot{X}_1&=j\omega B\exp[j\omega t]\\ \ddot{X}_1&=(j\omega)^2B\exp[j\omega t]=-\omega^2B\exp[j\omega t]\end{aligned}\tag{6.38}$$

に注意して整理すると，

$$\left(-\omega^2+b+ja\omega\right)B\exp[j\omega t]=A\exp[j\omega t]\tag{6.39}$$

となる．

前節では $m^2+am+b=0$ の解と $j\omega$が一致するかしないかによって，特解の形が変わることを示した．まず $m^2+am+b=0$の解と $j\omega$が一致する場合はどのようなときなのか考えてみよう． $m^2+am+b=0$ が実解を持つときは（重解も含めて），その解は $j\omega$ と一致することはない． $j\omega$ が純虚数なのだから． $j\omega$ が $m^2+am+b=0$ の解と一致するときは $m^2+am+b=0$ の解が純虚数でなければならない．そしてその純虚数の解が $\pm j\omega$ でなければならない．これは $a=0$かつ $b=\omega^2$ の場合に限られる．従って， $a=0$かつ $b=\omega^2$ の場合とそうでない場合を区別して論じなければならない．

【($a=0$かつ $b=\omega^2$)でない場合】

（ $a=0$かつ $b=\omega^2$ ）でない場合は $-\omega^2+b+ja\omega\neq 0$ となる．このとき(6.39)式で $-\omega^2+b+ja\omega$での割算が

できるので，

$$B=\frac{A}{-\omega^2+b+ja\omega} \tag{6.40}$$

となる．従って，特解 $X_1(t)$ は次のように求められる．

$$X_1(t)=\frac{A}{-\omega^2+b+ja\omega}\exp[j\omega t] \tag{6.41}$$

(6.40)式の分母の複素数 $-\omega^2+b+ja\omega$ を，オイラーの公式を用いて指数関数を使った極表示で表してみる．

$$-\omega^2+b+ja\omega=\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}\exp[j\phi] \quad , \quad \phi=\arg\left(-\omega^2+b+ja\omega\right) \tag{6.42}$$

ここで $\arg\left(-\omega^2+b+ja\omega\right)$ は複素数 $-\omega^2+b+ja\omega$ の偏角である．この極表示された表式を使うと，

$$\begin{aligned} X_1(t)&=\frac{A}{-\omega^2+b+ja\omega}\exp[j\omega t]=\frac{A_m\exp[j\theta]}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}\exp[j\phi]}\exp[j\omega t] \\ &=\frac{A_m}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}}\exp[j(\omega t+\theta-\phi)] \end{aligned} \tag{6.43}$$

またもオイラーの公式を用いて， $\exp[j(\omega t+\theta-\phi)]$ を三角関数で表すと

$$X_1(t)=\frac{A_m}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\phi)+j\sin(\omega t+\theta-\phi)\right\} \tag{6.44}$$

となる．

X_1 が得られたので，式(6.34)から非同次項が $A_m\cos(\omega t+\theta)$ と $A_m\sin(\omega t+\theta)$ に応じて x_{c1} および x_{s1} が得られる．

$$\begin{aligned} x_{c1}(t)&=\mathrm{Re}\,X_1(t)=\frac{A_m}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}}\cos(\omega t+\theta-\phi) \\ x_{s1}(t)&=\mathrm{Im}\,X_1(t)=\frac{A_m}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}}\sin(\omega t+\theta-\phi) \end{aligned} \tag{6.45}$$

非同次項が $A_m\cos(\omega t+\theta)$ と $A_m\sin(\omega t+\theta)$ の一般解をそれぞれ， $x_c(t)$ および $x_s(t)$ とする．同次方程式の解を $x_0(t)$ とすれば， $x_c(t)$ および $x_s(t)$ は

$$\begin{aligned} x_c(t)&=x_0(t)+x_{c1}(t)=x_0(t)+\mathrm{Re}\,X_1(t) \\ &=\frac{A_m}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}}\cos(\omega t+\theta-\phi) \\ x_s(t)&=x_0(t)+x_{s1}(t)=x_0(t)+\mathrm{Im}\,X_1(t) \\ &=\frac{A_m}{\sqrt{\left(-\omega^2+b\right)^2+\left(a\omega\right)^2}}\sin(\omega t+\theta-\phi) \end{aligned}$$

となる．ただし， $x_0(t)$ は $\alpha=-a/2, \beta=\sqrt{|a^2-4b|}$ として，次のように与えられる．

$$X_0(t)=\begin{cases}\left(C_1\cosh\beta t+C_2\sinh\beta t\right)\exp[\alpha t] & \left(m=\alpha\pm\beta\right) \\ \left(C_1 t+C_2\right)\exp[\alpha t] & \left(m=\alpha\right) \\ \left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right)\exp[\alpha t] & \left(m=\alpha\pm j\beta\right)\end{cases} \tag{6.46}$$

【（ $a=0$ かつ $b=\omega^2$ ）の場合】

$a=0$ かつ $b=\omega^2$ の場合は $-\omega^2+b+ja\omega=0$ となり， B を定数として(6.41)式の形で特解が求められない．そんなときは

$$X_1(t)=B(t)\exp[j\omega t] \tag{6.47}$$

として，定数変化法を適用しよう． $X_1(t)$ の微分を計算してみる．

$$\dot{X}_1(t)=\dot{B}(t)\exp[j\omega t]+j\omega B(t)\exp[j\omega t]$$
$$\ddot{X}_1(t)=\ddot{B}(t)\exp[j\omega t]+2j\omega\dot{B}(t)\exp[j\omega t]+(j\omega)^2 B\exp[j\omega t] \tag{6.48}$$

これらの表式を $\ddot{X}_1+a\dot{X}_1+bX_1=A\exp[j\omega t]$ に代入する．整理した結果は次式となる．

$$\left\{\ddot{B}(t)+\left(2j\omega+a\right)\dot{B}(t)+\left((j\omega)^2+aj\omega+b\right)B(t)\right\}\exp[j\omega t]=A\exp[j\omega t] \tag{6.49}$$

$-\omega^2+b+ja\omega=0$ を使い（$a=0$ である），計算を進めると，次式を得る．

$$\ddot{B}(t)+2j\omega\dot{B}(t)=A \tag{6.50}$$

これより，$\omega\neq 0$ としているので

$$B(t)=\frac{A}{2j\omega}t \tag{6.51}$$

を得る．従って，特解は次のように求められる．

$$X_1(t)=\frac{A}{2j\omega}\,t\exp[j\omega t] \tag{6.52}$$

$2j\omega$ を極表示で表してみる．ただし，$\omega>0$ であるとしておく．

$$2j\omega=2\omega\exp[j\pi/2] \tag{6.53}$$

となる．従って，特解は次のように書ける．

$$\begin{aligned}X_1(t)&=\frac{A}{2j\omega}\,t\exp[j\omega t]=\frac{A_m\exp[j\theta]}{2\omega\exp[j\pi/2]}\,t\exp[j\omega t]\\&=\frac{A_m}{2\omega}\,t\exp[j(\omega t+\theta-\pi/2)]\\&=\frac{A_m}{2\omega}\,t\left\{\cos(\omega t+\theta-\pi/2)+j\sin(\omega t+\theta-\pi/2)\right\}\end{aligned} \tag{6.54}$$

特解が得られたので，式(6.32)から x_{c1} および x_{s1} は

$$\begin{aligned}x_{c1}(t)&=\mathrm{Re}\,X_1(t)=\frac{A_m}{2\omega}\,t\cos(\omega t+\theta-\pi/2)=\frac{A_m}{2\omega}\,t\sin(\omega t+\theta)\\x_{s1}(t)&=\mathrm{Im}\,X_1(t)=\frac{A_m}{2\omega}\,t\sin(\omega t+\theta-\pi/2)=-\frac{A_m}{2\omega}\,t\cos(\omega t+\theta)\end{aligned} \tag{6.55}$$

と求められる．

非同次項が $A_m\cos(\omega t+\theta)$ と $A_m\sin(\omega t+\theta)$ の一般解をそれぞれ，$x_c(t)$ および $x_s(t)$ とする．同次方程式の解を $x_0(t)$ とすれば，$x_c(t)$ および $x_s(t)$ は

$$\begin{aligned}x_c(t)&=x_0(t)+\mathrm{Re}\,X_1(t)=x_0(t)+\frac{A_m}{2\omega}\,t\sin(\omega t+\theta)\\x_s(t)&=x_0(t)+\mathrm{Im}\,X_1(t)=x_0(t)-\frac{A_m}{2\omega}\,t\cos(\omega t+\theta)\end{aligned} \tag{6.56}$$

となる．ただし，$m^2+am+b=0$ の解が $\pm j\omega$ であることより $x_0(t)$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}x_0(t)&=C_1\exp[j\omega t]+C_2\exp[-j\omega t]\\&=D_1\cos\omega t+D_2\sin\omega t\end{aligned} \tag{6.57}$$

今扱った場合の微分方程式に条件をあからさまに反映させると，その形は

$$\ddot{X}+\omega^2 X=A\exp[j\omega t] \tag{6.58}$$

となることを注意しておく．

7　まとめらしき節

7.1　$m^2+am+b=0$ の意味

微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を解く際に

$$m^2+am+b=0 \tag{7.1}$$

が現れた．これは $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$ を次へと変形するために必要な m_1 と m_2 を求めるために必要となったのである．

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}-m_2x\right)-m_1\left(\dot{x}-m_2x\right)=0 \tag{7.2}$$

別の観点から $m^2+am+b=0$を眺めてみる．実は，同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$の解を次の形で見つけようとしたときに

$$x=A\exp[mt] \quad (A\neq 0) \tag{7.3}$$

2 次方程式 $m^2+am+b=0$を満たす mが必要となる．これは上の(7.3)式を微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ に代入すると

$$\left(m^2+am+b\right)A\exp[mt]=0 \tag{7.4}$$

となることより，確かめられる． $m^2+am+b=0$の解を m_1および m_2 とすると，線形性より同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$の解は， $m_1\neq m_2$ とき

$$x_0(t)=C_1\exp[m_1t]+C_2\exp[m_2t] \tag{7.5}$$

で与えられる．この解は 2 つの不定定数を含むので，一般解となる．

重解のとき（ $m_1=m_2$ ）は

$$\begin{aligned}x_0(t)&=C_1\exp[m_1t]+C_2\exp[m_2t]\\&=D_1\exp[m_1t]\end{aligned} \tag{7.6}$$

となる．ここで， $D_1=C_1+C_2$として，新しい不定定数 Dを用いた．この形の解は 1 つの不定定数しか含まないので，一般解と言えない．別の形をした解を探す必要がある．こんなときはいつもの定数変化法を用いよう．すなわち

$$x(t)=A(t)\exp[mt] \tag{7.7}$$

として， Aを関数とみなす．このとき

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\dot{A}(t)\exp[mt]+mA(t)\exp[mt]\\\ddot{x}(t)&=\ddot{A}(t)\exp[mt]+2m\dot{A}(t)\exp[mt]+m^2A(t)\exp[mt]\end{aligned} \tag{7.8}$$

となる．これらの表式を微分方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ に代入して整理すると，次式を得る．

$$\ddot{A}(t)\exp[mt]+\left(2m+a\right)\dot{A}(t)\exp[mt]+\left(m^2+am+b\right)A(t)\exp[mt]=0 \tag{7.9}$$

$m^2+am+b=0$が重解を持つとき，その解が $m_1=-a/2$なので（ $a^2=4b$も成立する）

$$\ddot{A}(t)\exp[m_1t]=0 \tag{7.10}$$

となる．これより，

$$A(t)=C_1+C_2t \tag{7.11}$$

従って

$$x_0(t)=\left(C_1+C_2\,t\right)\exp[m_1t] \tag{7.12}$$

となる．この形の解(7.6)での $D_1\exp[m_1t]$ と異なる解 $t\exp[m_1t]$を含み，不定定数を 2 つもっているので一般解と言える．

7.2　オイラーの公式は重要

$m^2+am+b=0$が複素解を持つとき，同次方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$の一般解に三角関数が現れることを示しておいた．一般解を最初から三角関数で表した表式を記憶して置くことに越したことはない．しかし記憶量の“節約”からすれば，(7.5)式の形だけを記憶しておき，オイラーの公式

$$\exp[j\theta]=\cos\theta+j\sin\theta \tag{7.13}$$

を適用して三角関数に戻す方がお勧めである．

7.3　非同次方程式の解

微分方程式 $\dot{x}+ax=f(t)$と $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$の解法について説明してきた．非同次項の $f(t)$が具体的に与えられた状況でこれらの微分方程式を解く必要が生じたときに，解の公式を適用して積分を実行して解を決定す

るのは面倒である．以前にも述べたように， $f(t)$ が単純な関数形であれば線形性を利用した解法がお勧めである．このような場合は，特解の形を予想して，簡単な計算でその特解を決めることができる．そして同次方程式の一般解をその特解に加えておけば，非同次方程式の一般解が得られる．特解の形が簡単に予想できそうにない場合に限り，積分で表された解の表式を使い，積分を実行してやればよい．

8　例題

【問題 1】微分方程式 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$ とする．

対象とする微分方程式に対応する 2 次方程式は $m^2+3m+2=0$ であり，これの解は

$$m=-1\,,\,-2$$

となる．従って，$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$ の一般解は，不定定数を C_1 および C_2 として，次式で与えられる．

$$x(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]$$

$\dot{x}(t)$ は次式で与えられる．

$$\dot{x}(t)=-C_1\exp[-t]-2C_2\exp[-2t]$$

初期条件を満たす解は次式を満たさなければならない．

$$C_1+C_2=0$$

$$-C_1-2C_2=1$$

従って，不定定数は次のように決まる．

$$C_1=1\,,\,C_2=-1$$

これより，解は次式となる．

$$x(t)=\exp[-t]-\exp[-2t]$$

【問題 2】微分方程式 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\exp[-3t]$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=2$, $\dot{x}(0)=0$ とする．

同次方程式の一般解 $x_0(t)$ と非同次方程式の特解 $x_1(t)$ を求め，次の形で非同次方程式の一般解を求める．

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)$$

同次方程式の解 $x_0(t)$ は【問題 1】と同じである．

$$x_0(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]$$

特解 $x_1(t)$ は次の形に予想できる．

$$x_1(t)=A\exp[-3t]$$

これを非同次方程式に代入して次式を得る．

$$2A\exp[-3t]=\exp[-3t]$$

これより特解 $x_1(t)$ は次のように求められ，

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\exp[-3t]$$

非同次方程式の一般解は次式となる

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0(t)+x_1(t)\\&=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]+\frac{1}{2}\exp[-3t]\end{aligned}$$

これを微分して，次式をえる．

$$\dot{x}(t)=-C_1\exp[-t]-2C_2\exp[-2t]-\frac{3}{2}\exp[-3t]$$

初期条件を満たす解は次式を満たさなければならない．

$$C_1+C_2+\frac{1}{2}=2$$

$$-C_1-2C_2-\frac{3}{2}=0$$

この連立方程式を解いて，不定定数は次のように決まる．

$$C_1=\frac{9}{2}\,,\,C_2=-3$$

これより，解は次式となる．

$$x(t)=\frac{9}{2}\exp[-t]-3\exp[-2t]+\frac{1}{2}\exp[-3t]$$

【問題 3】微分方程式 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\exp[-t]$を解け．ただし，初期条件は $x(0)=2$, $\dot{x}(0)=1$とする．

同次方程式の一般解 $x_0(t)$ と非同次方程式の特解 $x_1(t)$ を求め，次の形で非同次方程式の一般解を求める．

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)$$

同次方程式の解 $x_0(t)$は【問題 1】と同じである．

$$x_0(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]$$

特解 $x_1(t)$ は， $x_1(t)=A\exp[-t]$の形で定まらない．同次方程式の解 $x_0(t)$の中に $A\exp[-t]$の形をした関数が含まれているからである．定数変化法を適用する．

$$x_1(t)=A(t)\exp[-t]$$

$$\dot{x}_1(t)=\dot{A}(t)\exp[-t]-A(t)\exp[-t]$$

$$\ddot{x}_1(t)=\ddot{A}(t)\exp[-t]-2\dot{A}(t)\exp[-t]+A(t)\exp[-t]$$

これを非同次方程式に代入して次式を得る．

$$\left(\ddot{A}(t)+\dot{A}(t)\right)\exp[-t]=\exp[-t]$$

この関係式を満たす一つの $A(t)$は

$$A(t)=t$$

である．従って，特解 $x_1(t)$ は次のように得られる．

$$x_1(t)=t\exp[-t]$$

同次方程式の一般解とあわせて， $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$ より次式となる．

$$x(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]+t\exp[-t]$$

これを微分して，次式を得る．

$$\dot{x}(t)=-C_1\exp[-t]-2C_2\exp[-2t]+\exp[-t]-t\exp[-t]$$

初期条件を満たす解は次式を満たさなければならない．

$$C_1+C_2=2$$

$$-C_1-2C_2+1=1$$

この連立方程式を解いて，不定定数は次のように決まる．

$$C_1=4\,,\,C_2=-2$$

これより，解は次式となる．

$$x(t)=4\exp[-t]-2\exp[-2t]+t\exp[-t]$$

【問題 4】微分方程式 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=2\sin 2t$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=3$とする．

同次方程式の解 $x_0(t)$は【問題 1】と同じである．

$$x_0(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]$$

非同次項が三角関数であるので，問題とする微分方程式に代えて次の形の微分方程式を扱う．

$$\ddot{X}_1+3\dot{X}_1+2X_1=2\exp[j2t]$$

特解を次の形に想定して，

$$X_1(t)=A\exp[j2t]$$

非同次方程式に代入して次式を得る．

$$(-2+j6)A\exp[j2t]=2\exp[j2t]$$

これより特解 $X_1(t)$は次のように求められる．

$$X_1(t)=\frac{2}{-2+j6}\exp[j2t]=\frac{-1-j3}{10}\exp[j2t]=\frac{-1-j3}{10}\left(\cos(2t)+j\sin(2t)\right)$$
$$=\left\{-\frac{1}{10}\cos(2t)+\frac{3}{10}\sin(2t)\right\}+j\left\{-\frac{3}{10}\cos(2t)-\frac{1}{10}\sin(2t)\right\}$$

従って，求めるべき非同次方程式の特解 $x_{s1}(t)$ は次式となる．

$$x_{s1}(t)=\operatorname{Im}X_1(t)=-\frac{1}{10}\sin 2t-\frac{3}{10}\cos 2t$$

一般解は $x(t)=x_0(t)+x_{s1}(t)$ より次式となる．

$$x(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]-\frac{1}{10}\sin 2t-\frac{3}{10}\cos 2t$$

また微分すると，次式となる．

$$x(t)=-C_1\exp[-t]-2C_2\exp[-2t]-\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{3}{5}\sin 2t$$

初期条件を満たす解は次式を満たさなければならない．

$$\left.\begin{array}{r} C_1+C_2-\dfrac{3}{10}=0 \\ -C_1-2C_2-\dfrac{1}{5}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=\dfrac{19}{5} \\ C_2=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

これより初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t)=\frac{19}{5}\exp[-t]-\frac{7}{2}\exp[-2t]-\frac{1}{10}\sin 2t-\frac{3}{10}\cos 2t$$

【問題 5】微分方程式 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\cos 2t$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=2$ とする．

前問と比較すると，初期条件と非同次項が $2\cos 2t$ に変わっただけである．非同次項を $2\exp[j2t]$ とした場合の特解 $X_1(t)$ を求める作業は前問で済んでいる．

$$X_1(t)=\frac{1}{-1+j3}\exp[j2t]$$

今回はこれをオイラーの公式を利用してみる．分母の複素数 $-1+j3$ を極形式で表現する．

$$-1+j3=\sqrt{10}\exp[j\theta] \quad , \quad \theta=\arg(-1+j3) \quad (-\pi<\theta\le\pi)$$

ここで，θ は次の関係を満たす角（ラディアン）であり，複素数 $-1+j3$ の偏角である

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad (-\pi<\theta\le\pi)$$

このとき，

$$X_1(t)=\frac{1}{\sqrt{10}\exp[j\theta]}\exp[j2t]=\frac{1}{\sqrt{10}}\exp[j(2t-\theta)]=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\cos(2t-\theta)+j\sin(2t-\theta)\right)$$

となる． $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\cos 2t$ の特解は $\operatorname{Re}X_1(t)$ なので，その特解と同次解をあわせて，一般解は次式となる．

$$x_c(t)=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]+\operatorname{Re}X_1(t)$$
$$=C_1\exp[-t]+C_2\exp[-2t]+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos(2t-\theta)$$

また，微分すると次式となる．

$$\dot{x}_c(t)=-C_1\exp[-t]-2C_2\exp[-2t]-\frac{2}{\sqrt{10}}\sin(2t-\theta)$$

初期条件を満たす解は次式を満たさなければならない．

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}\cos\theta = 1 \\ -C_1 - 2C_2 + \dfrac{2}{\sqrt{10}}\sin\theta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{1}{10} = 1 \\ -C_1 - 2C_2 + \dfrac{6}{10} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{18}{5} \\ C_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

これより，解は次式となる.

$$x_c(t) = \frac{18}{5}\exp[-t] - \frac{5}{2}\exp[-2t] + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos(2t-\theta)$$

【問題 6】微分方程式 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 6x = 0$ を解け．ただし，初期条件は $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ とする.

$\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = 0$ に対する 2 次方程式は $m^2 + 2m + 6 = 0$ となり，

$$m = \frac{1}{2}\left\{-2 \pm j\sqrt{20}\right\} = -1 \pm j\sqrt{5}$$

従って，一般解は次式となる．色々な書き方ができる.

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\exp[(-1+j\sqrt{5})t] + C_2\exp[(-1-j\sqrt{5})t] \\ &= \left\{C_1\exp[j\sqrt{5}\,t] + C_2\exp[-j\sqrt{5}\,t]\right\}\exp[-t] \\ &= \left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t + D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] \end{aligned}$$

これを微分して

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (-1+j\sqrt{5})C_1\exp[(-1+j\sqrt{5})t] + (-1-j\sqrt{5})C_2\exp[(-1-j\sqrt{5})t] \\ &= j\sqrt{5}\left\{C_1\exp[j\sqrt{5}\,t] - C_2\exp[-j\sqrt{5}\,t]\right\}\exp[-t] - \left\{C_1\exp[j\sqrt{5}\,t] + C_2\exp[-j\sqrt{5}\,t]\right\}\exp[-t] \\ &= \sqrt{5}\left\{-D_1\sin\sqrt{5}\,t + D_2\cos\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] - \left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t + D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] \end{aligned}$$

不定定数として D_1 と D_2 を用いた表式を使ってみる．初期条件を満たす解は次式を満たさなければならない.

$$D_1 = 0\,,\ \sqrt{5}D_2 - D_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0\,,\ D_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t)\exp[-t]$$

【問題 7】微分方程式 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 6x = \exp[-2t]$ を解け．ただし，初期条件は $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ とする.

前問でこの微分方程式の同次解を求めてある．従って，特解だけを求めればよい．特解は $A\exp[-2t]$ の形で求められる.

$$A = \frac{1}{6}$$

従って，非同次方程式の一般解は次式となる.

$$x(t) = \left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t + D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] + \frac{1}{6}\exp[-2t]$$

また，これを微分して次式となる.

$$\dot{x}(t) = \sqrt{5}\left\{-D_1\sin\sqrt{5}\,t + D_2\cos\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] - \left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t + D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] - \frac{1}{3}\exp[-2t]$$

初期条件を満たすためには，不定定数は次の関係を満たさなければならない.

$$D_1 + \frac{1}{6} = 1\,,\ \sqrt{5}D_2 - D_1 - \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{5}{6}\,,\ D_2 = \frac{7}{30}\sqrt{5}$$

これより，一般解は次式で与えられる.

$$x(t) = \left\{\frac{5}{6}\cos\sqrt{5}\,t + \frac{7\sqrt{5}}{30}\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t] + \frac{1}{6}\exp[-2t]$$

【問題 8】微分方程式 $\ddot{x}+2\dot{x}+6x=3\cos 2t$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=1$ とする．

前問でこの微分方程式の同次解を求めてある．従って，特解だけを求めればよい．非同次項が三角関数 $3\cos 2t$ なので微分方程式を $\ddot{x}+2\dot{x}+6x=3\exp[j2t]$ として，この方程式の特解 X_1 を先ず求める．特解 X_1 は $X_1=A\exp[j2t]$ の形で求められる．

$$A=\frac{3}{2+j4}$$

ここで分母の複素数 $2+j4$ をオイラーの公式を介して極表示する．

$$2+j4=2\sqrt{5}\exp[j\theta] \qquad \left(\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

従って，特解 X_1 は次式となり，

$$\begin{aligned}X_1&=A\exp[j2t]=\frac{3}{2\sqrt{5}\exp[j\theta]}\exp[j2t]\\&=\frac{3\sqrt{5}}{10}\exp[j(2t-\theta)]\\&=\frac{3\sqrt{5}}{10}\left\{\cos(2t-\theta)+j\sin(2t-\theta)\right\}\end{aligned}$$

微分方程式 $\ddot{x}+2\dot{x}+6x=3\cos 2t$ の特解は X_1 の実数部を取り出せばよい．その特解と同次解をあわせて，一般解として次式を得る．

$$x(t)=\left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t+D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]+\frac{3\sqrt{5}}{10}\cos(2t-\theta)$$

また，これを微分して次式を得る．

$$\dot{x}(t)=\sqrt{5}\left\{-D_1\sin\sqrt{5}\,t+D_2\cos\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]-\left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t+D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]-\frac{3\sqrt{5}}{5}\sin(2t-\theta)$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない．

$$D_1+\frac{3\sqrt{5}}{10}\cos\theta=1,\ \sqrt{5}D_2-D_1+\frac{3\sqrt{5}}{5}\sin\theta=1 \quad\Rightarrow\quad D_1=\frac{7}{10},\ D_2=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t)=\left\{\frac{7}{10}\cos\sqrt{5}\,t+\frac{\sqrt{5}}{10}\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]+\frac{3\sqrt{5}}{10}\cos(2t-\theta)$$

【問題 9】微分方程式 $\ddot{x}+2\dot{x}+6x=3\sin 2t$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=1$ とする．

前問を参考にできる．この方程式の特解は前問の X_1 の虚数部をとればよい．従って，一般解は次式となる．

$$x(t)=\left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t+D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]+\frac{3\sqrt{5}}{10}\sin(2t-\theta)$$

また，これを微分して次式を得る．

$$\dot{x}(t)=\sqrt{5}\left\{-D_1\sin\sqrt{5}\,t+D_2\cos\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]-\left\{D_1\cos\sqrt{5}\,t+D_2\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]+\frac{3\sqrt{5}}{5}\cos(2t-\theta)$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない．

$$D_1-\frac{3\sqrt{5}}{10}\sin\theta=1,\ \sqrt{5}D_2-D_1+\frac{3\sqrt{5}}{5}\cos\theta=1 \quad\Rightarrow\quad D_1=\frac{8}{5},\ D_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t)=\left\{\frac{8}{5}\cos\sqrt{5}\,t+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\sqrt{5}\,t\right\}\exp[-t]+\frac{3\sqrt{5}}{10}\sin(2t-\theta)$$

【問題 10】微分方程式 $\ddot{x}+4x=0$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=2$ とする．

$\ddot{x}+4x=0$ に対する 2 次方程式は $m^2+4=0$ となり，

$$m=\pm j2$$

従って，一般解は次式となる．色々な書き方ができる．

$$x(t)=C_1\exp[j2t]+C_2\exp[-j2t]$$
$$=D_1\cos 2t+D_2\sin 2t$$

これを微分して

$$\dot{x}(t)=j2\left\{C_1\exp[j2t]-C_2\exp[-j2t]\right\}$$
$$=-2D_1\sin 2t+2D_2\cos 2t$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない．

$$D_1=0\,,\,2D_2=2$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t)=\sin 2t$$

【問題 11】微分方程式 $\ddot{x}+4x=2\cos 3t$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=3$, $\dot{x}(0)=0$ とする．

同次方程式 $\ddot{x}+4x=0$ の一般解は前問で求めてある．従って特解が問題となる． $\ddot{x}+4x=2\cos 3t$ の特解は非同次項の $2\cos 3t$ を $2\exp[j3t]$ で置き換えた $\ddot{x}+4x=2\exp[j3t]$ を経由して求めよう． $\ddot{x}+4x=2\exp[j3t]$ の特解 X_1 は $X_1=A\exp[j3t]$ の形で得られる．

$$A=-\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad X_1(t)=-\frac{2}{5}\exp[j3t]=-\frac{2}{5}\left\{\cos 3t+j\sin 3t\right\}$$

従って， $\ddot{x}+4x=2\cos 3t$ の一般解は次式となる．

$$x(t)=C_1\exp[j2t]+C_2\exp[-j2t]+\mathrm{Re}\,X_1(t)$$
$$=D_1\cos 2t+D_2\sin 2t-\frac{2}{5}\cos 3t$$

これを微分して

$$\dot{x}(t)=-2D_1\sin 2t+2D_2\cos 2t+\frac{6}{5}\sin 3t$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない．

$$D_1-\frac{2}{5}=3\,,\,2D_2=0\quad\Rightarrow\quad D_1=\frac{17}{5}\,,\,D_2=0$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t)=\frac{17}{5}\cos 2t-\frac{2}{5}\cos 3t$$

【問題 12】微分方程式 $\ddot{x}+4x=2\sin 2t$ を解け．ただし，初期条件は $x(0)=3$, $\dot{x}(0)=0$ とする．

同次方程式 $\ddot{x}+4x=0$ の一般解は以前に求めてある．従って特解が問題となる． $\ddot{x}+4x=2\sin 3t$ の特解は非同次項の $2\sin 2t$ を $2\exp[j2t]$ で置き換えた $\ddot{x}+4x=2\exp[j2t]$ を経由して求めよう． $\ddot{x}+4x=2\exp[j2t]$ の特解 X_1 として， $X_1=A\exp[j2t]$ を試みる．

$$X_1=A\exp[j2t]\quad,\quad\dot{X}_1=j2A\exp[j2t]\quad,\quad\ddot{X}_1=-4A\exp[j2t]$$

しかし， $X_1=A\exp[j2t]$ は $\ddot{X}_1+4X_1=0$ となってしまう． $X_1=A\exp[j2t]$ の形の解は同次方程式に現れる

ので，非同次方程式の特解になり得ない．

いつものように定数変化法で対応する． $X_1 = A(t)\exp[j2t]$ として，

$$X_1 = A\exp[j2t]$$
$$\dot{X}_1 = \dot{A}(t)\exp[j2t] + j2A(t)\exp[j2t]$$
$$\ddot{X}_1 = \ddot{A}(t)\exp[j2t] + j4\dot{A}(t)\exp[j2t] - 4A(t)\exp[j2t]$$

これらの表式を $\ddot{X}_1 + 4\ddot{X}_1 = 2\exp[j2t]$ に代入すると

$$\left\{\ddot{A}(t) + j4\dot{A}(t)\right\}\exp[j2t] = 2\exp[j2t] \quad \Rightarrow \quad \ddot{A}(t) + j4\dot{A}(t) = 2$$

となる．この関係式を満たす一つの $A(t)$ として，次式を得る．

$$A(t) = -\frac{j}{2}t \quad \Rightarrow \quad X_1(t) = -\frac{j}{2}t\exp[j2t] = -\frac{j}{2}t\left\{\cos 2t + j\sin 2t\right\}$$

この表式の虚数部をとって， $\ddot{x} + 4x = 2\sin 2t$ の特解が得られる．同次解を加えることによって，一般解は次のように求められる．

$$x(t) = C_1\exp[j2t] + C_2\exp[-j2t] + \mathrm{Im}\,X_1(t)$$
$$= D_1\cos 2t + D_2\sin 2t - \frac{1}{2}t\cos 2t$$

これを微分して

$$\dot{x}(t) = -2D_1\sin 2t + 2D_2\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t + t\sin 2t$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない．

$$D_1 = 3\,,\; 2D_2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = 3,\, D_2 = \frac{1}{4}$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t) = 3\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t\cos 2t$$

【問題 13】微分方程式 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \exp[-t]$ を解け．ただし，初期条件は $x(0) = 0\,,\, \dot{x}(0) = 1$ とする．

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2\exp[-t]$ に対する 2 次方程式は $m^2 + 4m + 4 = 0$ となり，

$$m = -2$$

と重解となる．従って，同次解は次式となる．

$$x_0(t) = \left\{C_1 + C_2 t\right\}\exp[-2t]$$

特解を次の形に仮定する．

$$x_1(t) = A\exp[-t]$$

この $x_1(t)$ を微分方程式 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \exp[-t]$ に代入して， $A = 1$ を得る．従って，一般解は次式となる．

$$x(t) = \left\{C_1 + C_2 t\right\}\exp[-2t] + \exp[-t]$$

これを微分して

$$\dot{x}(t) = C_2\exp[-2t] - 2\left\{C_1 + C_2 t\right\}\exp[-2t] - \exp[-t]$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない．

$$C_1 + 1 = 0 \quad , \quad -2C_1 + C_2 - 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = -1\,,\, C_2 = 0$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる．

$$x(t) = -\exp[-2t] + \exp[-t]$$

【問題 14】微分方程式 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2\exp[-2t]$ を解け．ただし，初期条件は $x(0) = 0\,,\, \dot{x}(0) = 1$ とする．

同次解は前問と同じなので，次式となる．

$$x_0(t) = \left\{C_1 + C_2 t\right\}\exp[-2t]$$

特解を次の形に仮定する.

$$x_1(t) = A\exp[-2t]$$

A を定数としてみる．この $x_1(t)$ を微分方程式 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2\exp[-2t]$ に代入しても，$0 \times A\exp[-2t] = \exp[-2t]$ となり，A を定数として求めることができない．すなわち特解を $x_1(t) = A\exp[-2t]$ の形で決められないのである．このようなときは A を定数とするのでなく，t の関数とするいつもの定数変化法を使う.

$$x_1(t) = A(t)\exp[-2t]$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{A}(t)\exp[-2t] - 2A(t)\exp[-2t]$$

$$\ddot{x}_1(t) = \ddot{A}(t)\exp[-2t] - 4\dot{A}(t)\exp[-2t] + 4A(t)\exp[-2t]$$

これを $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2\exp[-2t]$ に代入して整理する.

$$\ddot{A}(t) = 2$$

これより，$A(t)$ として次式を得る.

$$A(t) = t^2$$

従って，一般解は次式となる.

$$x_0(t) = \left\{C_1 + C_2 t\right\}\exp[-2t] + t^2\exp[-2t]$$

これを微分する.

$$\dot{x}(t) = C_2\exp[-2t] - 2\left\{C_1 + C_2 t\right\}\exp[-2t] + 2t\exp[-2t] - 2t^2\exp[-2t]$$

初期条件を満たすには，不定定数が次の関係式を満たさなければならない.

$$C_1 = 0 \quad , \quad -2C_1 + C_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0\,,\, C_2 = 1$$

従って，初期条件を満たす解は次式となる.

$$x_0(t) = t\exp[-2t] + t^2\exp[-2t]$$