第4回 偏微分方程式レクチャーシリーズ

5/23(土) 放物型発展方程式と Łojasiewicz - Simon 評価式 (1)

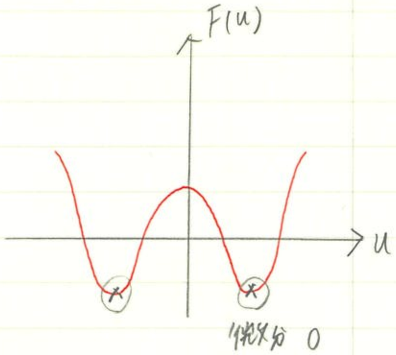
序. 1-dim O.D.E

$$\frac{du}{dt} = -f(u), \quad 0<t<\infty$$

$$f(u)\,\frac{du}{dt} = -\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \leqq 0$$

原始関数 $F(u) = \int_0^u f(v)\,dv$

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) = -\left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 \leqq 0$$



$t \nearrow \infty$ のとき $F(u(t)) \searrow$. さらに

$$\left.\frac{d}{dt}F(u(t))\right|_{t=t_0} = 0 \iff \frac{du}{dt}(t_0) = 0$$

2-dim

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -f(u,v), & 0<t<\infty \\ \dfrac{dv}{dt} = -g(u,v), & 0<t<\infty \end{cases}$$

$^\exists F(u,v) \qquad (f(u,v), g(u,v)) = \nabla F$

$F(u(t), v(t))$ は単調減少

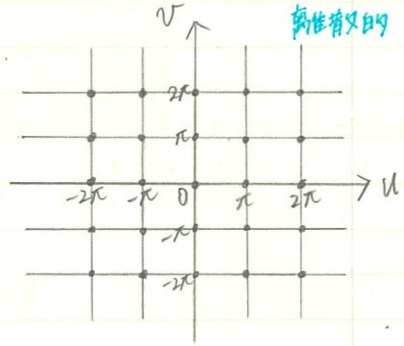
$t\to\infty$ ならば $u(t)\to\bar{u}$, $v(t)\to\bar{v}$

例1.

$F(u,v) = (\cos u + 1)(\cos v + 1)$

$$\begin{cases} f(u,v) = -\sin u(\cos v + 1) \\ g(u,v) = -(\cos u + 1)\sin v \end{cases}$$

定常解は離散的

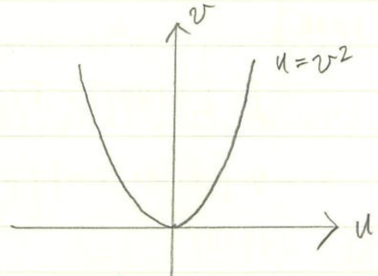


すべての軌道が最終的に適当な定常解へ収束することが示される.

例2.

$F(u,v) = \frac{1}{2}[v-u^2]^2$

$$\begin{cases} f(u,v) = -2u[u-v^2] \\ g(u,v) = [v-u^2] \end{cases}$$



定常解は連続的

解軌道に沿って $F(u(t), v(t)) \searrow$

定常解に収束するかどうか簡単には証明できない.

→ Łojasiewicz - Simon 評価式

n-dim.

$$\frac{dU}{dt} = -\nabla F(U), \quad 0<t<\infty$$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$U(t)$: 大域解とする.

$$\frac{d}{dt}F(U(t)) = -\|\nabla F(t)^2\| \leqq 0$$

$t\nearrow\infty$ のとき $F(U(t))\searrow$.

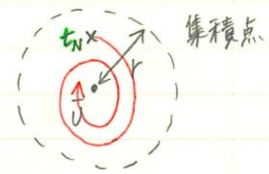
今、$^\exists t_n \nearrow \infty$ で $U(t_n)\to\bar{U} \Rightarrow \bar{U}\in\omega(U_0)$.

これに対して,

☆ Łojasiewicz - Simon 評価式 (以下 L-S 評価式)

$0 < {}^\exists\theta \leqq \frac{1}{2}$, ${}^\exists r>0$, ${}^\exists D>0$

$$\underbrace{\|\nabla F(U)\|}_{\mathbb{R}^n\text{のノルム}} \geqq D\,|F(U) - F(\bar{U})|^{1-\theta}, \quad {}^\forall U \in B(\bar{U}; r)$$



命題.

L-S 評価式の下に、

$U(t)\in B(\bar{U}; r)$, $t_N \leqq {}^\forall t \leqq T$ とすると

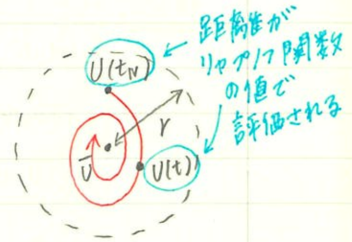
このような t について,

$$\|U(t) - U(t_N)\| \leqq (\theta D)^{-1}\,\underbrace{|F(U(t_N)) - F(\bar{U})|}_{\text{リャプノフ関数の値}}.$$

[証明]

$$-\frac{d}{dt}\left[F(u(t)) - F(\bar{u})\right]^{\theta}$$

$$= -\theta\left[F(u(t)) - F(\bar{u})\right]^{\theta-1} \times \nabla F(u(t)) \cdot \frac{du}{dt}(t)$$



$\frac{du}{dt} = -\nabla F(u)$

$$= \theta \underbrace{\left[F(u(t)) - F(\bar{u})\right]^{\theta-1} \|\nabla F(u(t))\|}_{\text{この部分をL-S評価式で下から評価}} \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|$$

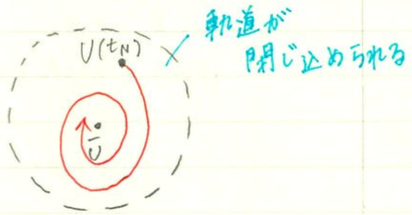
$$\geq D\theta \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|$$

$[t_N, t]$で積分すると、

$$\left[F(u(t_N)) - F(\bar{u})\right]^{\theta} - \cancel{\left[F(u(t)) - F(\bar{u})\right]^{\theta}}$$

$$\geq D\theta \int_{t_N}^{t} \left\|\frac{du}{ds}(s)\right\| ds$$

$$\geq D\theta \|\underbrace{u(t) - u(t_N)}_{\to \bar{u}}\| \quad \square$$

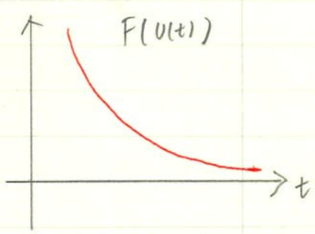


この証明で t_N と t を入れ替えて $t_N \to \infty$ とすると次の定理を得る.

定理.

$\bar{u} \in \omega(u_0)$ とする.
$\bar{u}$ の近傍でL-S評価式が成立すれば、

$$\|u(t) - \bar{u}\| \leq C\left|F(u(t)) - F(\bar{u})\right|^{\theta}.$$



定理.

有限次元で $F(u)$ が $\bar{u}$ で解析的ならば、
$0 < {}^{\exists}\theta \leq \frac{1}{2}$ について、$\bar{u}$ でL-S評価式が成り立つ. (文献[9])

[証明] ($n=1$ の場合)

$u = u$, $\bar{u} = \bar{u}$ とする. テイラー展開を用いて、

$$\begin{cases} F(u) = F(\bar{u}) + \frac{1}{1!}\overset{=0}{F'(\bar{u})}(u-\bar{u}) + \frac{1}{2!}\overset{\neq 0}{F''(\bar{u})}(u-\bar{u})^2 + O((u-\bar{u})^3) \\ F'(u) = \overset{=0}{F'(\bar{u})} + \frac{1}{1!}\overset{\neq 0}{F''(\bar{u})}(u-\bar{u}) + \frac{1}{2!}F'''(\bar{u})(u-\bar{u})^2 + O((u-\bar{u})^3) \end{cases}$$

$$F(u) - F(\bar{u}) = \frac{1}{2!}F''(\bar{u})(u-\bar{u})^2 + O((u-\bar{u})^3)$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{1}{F''(\bar{u})}\left[F''(\bar{u})(u-\bar{u})\right]^2 + O((u-\bar{u})^3)$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{1}{F''(\bar{u})}\left[F'(u) + O((u-\bar{u})^2)\right]^2 + O((u-\bar{u})^3)$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{1}{F''(\bar{u})}\left\{\left[F'(u)\right]^2 + 2F'(u)O((u-\bar{u})^2) + O((u-\bar{u})^4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{1}{F''(\bar{u})}\left[F'(u)\right]^2 + O((u-\bar{u})^3)$$

$$\leq C\left[F'(u)\right]^2 + O(u-\bar{u})\left|F(u) - F(\bar{u})\right|$$

$$\therefore \left|F(u) - F(\bar{u})\right| \leq C\left|F'(u)\right|^2 \quad \square$$

本講義ではこの理論を無限次元の場合に拡張することを目指す.

講義内容

1. Lyapunov関数をもつ拡散モデル
2. 発展方程式から生成される力学系
3. 結晶表面への成長モデル
4. 一般理論への拡張

1. Lyapunov関数をもつ拡散モデル

1.1. 反応拡散

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + f(u), & \Omega \in \mathbb{R}^n \\ u = 0, & \partial\Omega \\ u(t_0) = u_0(t), & \Omega \end{cases}$$

$\int_\Omega$ "方程式" $\times \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = a\int \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int f(u)\frac{\partial u}{\partial t} dx$$

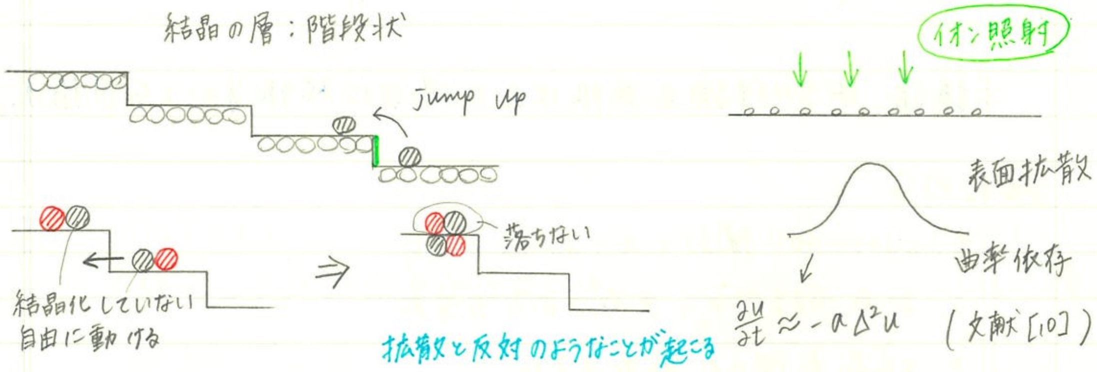
$$= -a\int \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla u \, dx + \frac{d}{dt}\int F(u)\, dx$$

$$= -\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int |\nabla u|^2 dx + \frac{d}{dt}\int F(u)\, dx$$

$$\frac{d}{dt}\int \Big[\underbrace{\frac{a}{2}|\nabla u|^2 - F(u)}_{=\,\Phi(u)}\Big] dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

1.2. 結晶表面の成長.(文献[8])

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -a\Delta^2 u - \mu\nabla\cdot\left[\frac{\nabla u}{1+|\nabla u|^2}\right], & \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x), & \Omega \end{cases}$$



$\frac{\partial u}{\partial t} \approx -a\Delta^2 u$ (文献[10])

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = -a\int \Delta^2 u \frac{\partial u}{\partial t} - \mu\int \nabla\cdot\left[\frac{\nabla u}{1+|\nabla u|^2}\right]\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= -a\int \Delta u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \mu\int \frac{1}{1+|\nabla u|^2}\nabla u\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u$$

$$= -\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int |\Delta u|^2 + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\int \log(1+|\nabla u|^2)$$

$$\frac{d}{dt}\int \Big[\underbrace{\frac{a}{2}|\Delta u|^2 - \frac{\mu}{2}\log(1+|\nabla u|^2)}_{=\,\Phi(u)}\Big] = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \leq 0$$

1.3. Keller-Segel 方程式(走化性粘菌方程式)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \mu\nabla[u\nabla\rho], & \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = b\Delta\rho - g\rho + \nu u, & \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x),\ \rho(x,0) = \rho_0(x), & \Omega \end{cases}$$

$a = b = \mu = \nu = g = 1$ とする.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla[u\nabla\log u] - \nabla[u\nabla\rho]$$

$$= \nabla[u\nabla(\log u - \rho)]$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial t}(\log u - \rho) = \int \nabla\cdot[u\nabla(\log u - \rho)](\log u - \rho)$$

$$\frac{d}{dt}\int [u\log u - u] - \int \frac{\partial u}{\partial t}\rho = -\int u|\nabla(\log u - \rho)|^2$$

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 = \int \Delta\rho\frac{\partial\rho}{\partial t} - \int \rho\frac{\partial\rho}{\partial t} + \int u\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\nabla\rho|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho^2 + \int u\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\int \left[\frac{1}{2}|\nabla\rho|^2 + \frac{1}{2}\rho^2\right] - \int u\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\int \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2$$

1.4. 森林動態 (文献[13,14])

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta\delta w - \gamma(u)u - fu, & \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = fu - hv, & \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial w}{\partial t} = d\Delta w - \beta w - \alpha v, & \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ w(x,0) = w_0(x), & \Omega \end{cases}$$

u:若年木の密度, v:成年木の密度, w:空中の種の密度

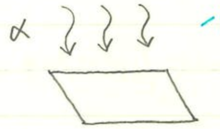
5/24(日) 放物型発展方程式とŁojasiewicz-Simon評価式(2)

2. 発展方程式から生成される力学系

結晶表面の成長モデルを例にして力学系の構成法について説明する.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: 凸または C^2 有界領域

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -a\Delta^2 u - \mu \nabla \cdot \left\{ \dfrac{\nabla u}{1+|\nabla u|^2} \right\}, & \Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x), & \Omega \end{cases}$$



$$\underbrace{u(x,t)}_{\text{ずれ}} = \underbrace{h(x,t)}_{\text{正味の高さ}} - \alpha t$$

2.1. 設定

線形作用素. $H_0^2(\Omega)$ 上の双線形形式

$$a(u,v) = a\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \, dx, \qquad u,v \in H_0^2(\Omega)$$

より、対称な線形作用素 A が定まる. と $\mathrm{Re}\, a(u,u) \geq \delta \|u\|^2_{H_0^2}$

$$A : H_0^2(\Omega) \to H_0^2(\Omega)' = H^{-2}(\Omega)$$

A は $L_2(\Omega)$ の自己共役作用素.

$a(u,v) = \langle Au, v \rangle$

非線形作用素

$$f(u) = -\mu \nabla \cdot \left\{ \frac{\nabla u}{1+|\nabla u|^2} \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega)$$

F は A の分数べきで評価できる. 実際,

$$f(\cdot) < A^{\frac{3}{4}} \qquad (*)$$

詳しくは

$$\|f(u)-f(v)\|_{H^{-2}} \leq \varphi(\|u\|+\|v\|) \times \left[\|A^{\frac{3}{4}}(u-v)\| + (\|A^{\frac{3}{4}}u\| + \|A^{\frac{3}{4}}v\| + 1)\|u-v\| \right],$$
$$u,v \in \mathcal{D}(A^{\frac{3}{4}})$$

φ は適当な単調増加関数.

2.2. 抽象方程式

$X = H^{-2}(\Omega)$ として、問題は

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u), & 0<t<\infty \\ u(0) = u_0 \in H^{-2}(\Omega) \end{cases}$$

と定式化される.

半線形抽象発展方程式の理論より

$\forall u_0 \in H^{-2}(\Omega)$, $\exists u$: 大域解

$$u \in C([0,\infty); H^{-2}(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); H^{-2}(\Omega)) \cap C((0,\infty); H_0^2(\Omega))$$

さらに、

$$\min\{1,t\} \|u(t)\|_{H_0^2(\Omega)} + \|u(t)\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C\left[e^{-\beta t}\|u_0\|_{H^{-2}} + 1 \right], \qquad 0<t<\infty$$

が示される.

2.3. 力学系

解は初期値 u_0 に対して連続であることがわかる.

これより、力学系が構成される.

$$\left(\underbrace{S(t)}_{\text{解作用素}}, \underbrace{H^{-2}(\Omega)}_{\text{相空間}}, \underbrace{H^{-2}(\Omega)}_{\text{基礎空間}} \right)$$

解作用素 $\quad S(t): H^{-2}(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$

$$u_0 \mapsto u(t) \quad (u_0\text{を初期値とする解})$$

マルコフ性（解の一意性）から、

$$S(0) = I, \quad S(t+s) = S(t)S(s) \qquad \text{“半群性”}$$

が成り立つ.

Lyapunov 関数

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[a|\Delta u|^2 - \mu \log(1+|\nabla u|^2) \right] dx, \quad u \in H_0^2(\Omega)$$

が構成される.

$$t \to \infty \text{ につれて } \Phi(S(t)u_0) \searrow$$

各 $u_0 \in H^{-2}(\Omega)$ について、

$$\omega(u_0) = \{ \bar{u} \,;\, {}^\exists t_n \nearrow \infty, \ S(t_n)u_0 \to \bar{u} \} \subset H_0^2(\Omega)$$

は空ではない.

3. 結晶表面の成長モデル（Mola 氏との共同研究）文献[6]

<u>設定の強化</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: 長方形 または C^4 有界領域

このとき A は $L_2(\Omega)$ の自己共役作用素として、

$$\mathcal{D}(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$$

基礎空間 $X = L_2(\Omega)$,

力学系は $(S(t), L_2(\Omega), L_2(\Omega))$ となる.

3.1. $\Phi(u)$ の性質

Φ は次の性質をもつことが確かめられる.

1. $\Phi : H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ は Fréchet 微分可能で
$\Phi'(u) = Au - f(u) \in H^{-2}(\Omega)$.

2. $u \in \mathcal{D}(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ ならば $\Phi'(u) \in L_2(\Omega)$ で
さらに、h が $\mathcal{D}(A)$ 内を動くとき

$$|\Phi(u+h) - \Phi(u) - (\Phi'(u), h)| \le C\|h\|_{L_2}\,\varphi(\|h\|_{H^4})$$

3. $\Phi' : H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ は Fréchet 微分可能で

$$\Phi''(u) = A - f'(u) \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega))$$

4. Φ は $\omega(u_0)$ 上で定数値

$$\inf_{0<t<\infty} \Phi(S(t)u_0)$$

をとる.

${}^\forall \bar{u} \in \omega(u_0)$ について $\Phi'(\bar{u}) = 0$, $A\bar{u} - f(\bar{u}) = 0$.

すなわち $\bar{u}$ は定常解である.

3.2. L-S 評価式

$0 < {}^\exists\theta \le \frac{1}{2}$, ${}^\exists r > 0$, ${}^\exists D > 0$ に対して、

$$(*) \quad \|\Phi'(u)\|_{H^{-2}(\Omega)} \ge D\left[\Phi(u) - \Phi(\bar{u})\right]^{1-\theta}, \quad {}^\forall u \in B^{H_0^2}(\bar{u}; r)$$

ただし、$\bar{u} \in \omega(u_0)$, $\Phi'(\bar{u}) = 0$.

$L = \Phi''(\bar{u})$ とおく.

Chill [文献2] の方法に従って証明する.

仮定 I. $L : H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ は Fredholm 作用素, i.e.,

$\dim K(L) < \infty$, $R(L)$ は閉, $\operatorname{codim} R(L) < \infty$,

このとき、

$$S = \{ u \in H_0^2(\Omega) \,;\, (I-P)\Phi'(u) = 0 \}$$

を導入する. ここで、 “特異多様体”

$$P : H_0^2(\Omega), L_2(\Omega), H^{-2}(\Omega) \to K(L)$$

S は C^1 級 $\dim K(L)$-次元多様体である.

仮定Ⅱ.　$\mathcal{S}$ 上で $\Phi(u)$ は L-S 評価式 (*) をみたす.

定理. ([文献2])

仮定Ⅰ, Ⅱ の下に $\Phi(u)$ は $H^2_0(\Omega)$ 全体で (*) をみたす.

[証明]

$$
\begin{array}{ccc}
H^2_0(\Omega) & \xrightarrow{L=\Phi''(\bar{u})} & H^{-2}(\Omega) \\
\| & & \| \\
K(L) & & K(L) \\
+ & & + \\
H_2 & \longleftrightarrow & R(L)
\end{array}
$$

直和

$L|_{H_2}$: 同型作用素

であるから議論は $\mathcal{S}$ 上に帰着する.
しかるに仮定Ⅱから $\mathcal{S}$ 上では (*) が成立するので $H^2_0(\Omega)$ 全体で成立することになる. □

系. Φ が解析的ならば、$\mathcal{S}$ は解析多様体となり $\Phi|_{\mathcal{S}}$ も解析的である. よって有限次元の L-S 評価式より仮定Ⅱが，さらには定理の結果が成立する.

3.3. Chill の方法が適用できることの検証

仮定Ⅰ.　$L = A - f'(\bar{u}) = [\underbrace{I - f'(\bar{u})A^{-1}}_{\text{コンパクト}}]\cdot \underbrace{A}_{\text{同型}}$ である.
よって Riesz-Schauder の理論より L は Fredholm である.

仮定Ⅱ.　系はそのままの形では使えない.

$u \in H^2_0(\Omega) \mapsto \int_\Omega \log(1+|\nabla u|^2)\,dx$ は解析的か?

$u \in H^2_0(\Omega) \Rightarrow Du \in H^1_0(\Omega) \Rightarrow Du \notin C(\bar{\Omega})$

より、$\log(1+u)$, $u \geq 0$, の解析性から $\Phi(u)$ の解析性は示せない.

しかし、

$$u \in H^{2+\varepsilon}(\Omega) \mapsto \int \log(1+|\nabla u|^2)\,dx$$

は $\nabla u \in H^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ より解析的.

ところで、$\mathcal{S} \subset H^{2+\varepsilon}(\Omega)$ である.

∵

$(I-P)\Phi'(u) = 0$

$(I-P)[Au - f(u)] = 0$

$Au - f(u) - P[Au - f(u)] = 0$

$\underbrace{Au = \underset{H^1}{f(u)} + \underbrace{P[\underbrace{Au - f(u)}_{H^{-2}}]}_{H^2_0}}$

$\Rightarrow u \in H^3(\Omega)$.

これより定理証明中の図式を

$$
\begin{array}{ccc}
H^{2+\varepsilon}_0(\Omega) & \xrightarrow{L} & H^{-2+\varepsilon}(\Omega) \\
\| & & \| \\
K(L) & & K(L) \\
+ & & + \\
H_{2+\varepsilon} & \longleftrightarrow & R(L)
\end{array}
$$

直和　　直和

$L|_{H_{2+\varepsilon}}$ は同型

とすることができ $H^{2+\varepsilon}_0(\Omega)$ で (*) が示される.
さらにこのことから $H^2_0(\Omega)$ 全体で (*) が成り立つことが結論付けられる.

4. 一般理論への拡張

4.1. 設定

空間.

$Z \subset Y \subset X$　稠密かつ連続な埋め込み

X : 実 Hilbert 空間, $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|_X$

Y, Z : 実回帰的 Banach 空間, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$

$0 < {}^\exists\alpha < 1$

(*)　$\|u\|_Y \leq C\|u\|_Z^\alpha \|u\|_X^{1-\alpha}$,　${}^\forall u \in Z$

とする.

$Z \subset X$ はコンパクトな埋め込みとする.

$\overline{B^Z(0;1)}^{(X)}$ は X のコンパクト

このとき空間の3つ組

$$Y\subset X\subset Y^* \approx Y',\qquad Z\subset X\subset Z^* \approx Z'$$

が定まる.

ところで、$Z\subset Y$ (稠密, 連続) より $Y'\subset Z'$ 共役空間, すなわち
$Y^*\subset Z^*$ (稠密, 連続) である. よって

$$Z\subset Y\subset X\subset Y^*\subset Z^*$$

とみなせる.

3つ組の性質より、

$$\|u\|_X \le C\|u\|_Z^{\frac{1}{2}}\|u\|_{Z^*}^{\frac{1}{2}},\qquad u\in Z$$

であったから (*) と併せて

$$\|u\|_Y \le \boxed{C}\boxed{\tilde{C}^{1-\alpha}}\|u\|_Z^{\frac{1+\alpha}{2}}\|u\|_{Z^*}^{\frac{1-\alpha}{2}},\qquad u\in Z$$

が得られる.

軌道.

ここでは1つの軌道 $u(t)$, $0\le t<\infty$ で

$$u\in C^1((0,\infty);X)\cap C([0,\infty);Z)$$

を考える.

さらに $R>0$ があって $u(t)\in \bar{B}^Z(0;R)$, $\forall t\in[0,\infty)$

$$\|u(t)\|_Z\le R,\qquad 0\le t<\infty$$

とする. このとき

$$\omega(u)=\{\bar u;\ \exists t_n\nearrow\infty,\ X\text{の中で } u(t_n)\to\bar u\}$$

とおく. $\omega(u)\ne\emptyset$ である.

さらに,

$$\emptyset\ne\omega(u)\subset\bar{B}^Z(0;R)$$

$u_n\in Z$, $\|u_n\|_Z\le R$
$\exists u_{n_k}\to\bar u$
かつ
$\|\bar u\|_Z\le\varliminf_{k\to\infty}\|u_{n_k}\|_Z$

である.

また、$\bar u\in\omega(u)$ である必要十分条件は,

$$\exists t_n\nearrow\infty,\quad Y\text{の中で } u(t_n)\to\bar u.$$

(仮定) $\|u(t_n)-\bar u\|_Y\le C\|u(t_n)-\bar u\|_Z^{\alpha}\|u(t_n)-\bar u\|_X^{1-\alpha}$

Lyapunov 関数.

GはYの閉集合で

$$\omega(\bar u)\subset\overline{\{u(t);\ 0\le t<\infty\}}^{(X)}\subset G$$

とする.

Frechet 微分の意味で

Gで定義された C^1 級の関数 $\Phi: G\to R$ が存在して、軌道に沿って

$$0\le s<t<\infty \text{ について } \Phi(u(t))<\Phi(u(s))$$

が成り立つと仮定する.

$\forall\bar u\in\omega(u)$ について、$\bar u=Y\text{-}\lim_{n\to\infty}u(t_n)$ とすると,

$$\Phi(\bar u)=\lim_{n\to\infty}\Phi(u(t_n))$$
$$=\inf_{0\le t<\infty}\Phi(u(t)),$$

すなわち、Φの値は $\omega(u)$ 上で一定である.
Φの微分について $Y^*\approx Y'$ であるから、各 $v\in G$ に対し
$\varphi\in Y^*$ があり、

$$\Phi(v+h)-\Phi(v)-\underbrace{\langle\varphi,h\rangle_{Y^*\times Y}}_{\text{随伴積}}=o(\|h\|_Y),$$
$$\forall h\in Y;\ \|h\|_Y\ll 1$$

とできる.
さらに、Φの微分について、$u\in G\cap Z$ について $\varphi\in X$ があり

(**) $$\Phi(u+h)-\Phi(u)-\underbrace{(\varphi,h)_{X\times X}}_{\text{内積}}=\|h\|_X R(h),$$
$$\forall h\in Z;\ \|h\|_Z\ll 1$$

と仮定する。
ここで、$\|h\|_Z \to 0$ のとき $R(h) \to 0$ とする。$\Phi'(u) = \psi$ である。

命題.

軌道 $u(t)$ に沿って

$$\frac{d}{dt}\Phi(u(t)) = \left(\overset{\in X}{\Phi'(u(t))}, \overset{\in X}{\frac{du}{dt}(t)}\right), \quad \forall t \in [0, \infty)$$

[証明]

(**) で $u = u(t)$, $h = u(t+\Delta t) - u(t)$ とおくと

$$\Phi(u(t+\Delta t)) - \Phi(u(t)) - \left(\Phi'(u(t)), u(t+\Delta t) - u(t)\right) = \|u(t+\Delta t) - u(t)\|_X R(h),$$

$$\frac{\Phi(u(t+\Delta t)) - \Phi(u(t))}{\Delta t} - \left(\Phi'(u(t)), \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}\right) = \pm \left\|\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}\right\|_X R(h).$$

$\Delta t \to 0$ とすると、Z で $u(t+\Delta t) - u(t) \to 0$ より、

$$\frac{d}{dt}\Phi(u(t)) - \left(\Phi'(u(t)), \frac{du}{dt}(t)\right) = 0.$$

4.2. 基本仮定と主結果

$\bar{u} \in \omega(u)$ とする。$\bar{u}$ について次の仮定をする。

仮定I. $\Phi'(\bar{u}) = 0$, "特異点条件".

仮定II. "角度条件" $\exists \delta > 0$, $\exists r > 0$, $\bar{u}$ の近傍で次のことが成り立つ。

$$0 \geqq \frac{d}{dt}\Phi(u(t)) = \left(\Phi'(u(t)), \frac{du}{dt}(t)\right) \leqq -\delta \|\Phi'(u(t))\|_{Y^*} \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{Z^*},$$

$$\forall u(t) \in \overline{B}^Y(\bar{u}; r)$$

仮定III. "Łojasiewicz - Simon 評価式"

$0 < \exists \theta \leqq \frac{1}{2}$, $\exists r > 0$, $\bar{u}$ の近傍で

$$\|\Phi'(u)\|_{Y^*} \geqq D|\Phi(u) - \Phi(\bar{u})|^{1-\theta}, \quad \forall u \in \overline{B}^Y(\bar{u}; r)$$

が成り立つ。ただし $D > 0$.

$\|\Phi'(u) - \Phi'(\bar{u})\|_{Y^*} \geqq D|\Phi(u) - \Phi(\bar{u})|^{1-\theta}$

命題.

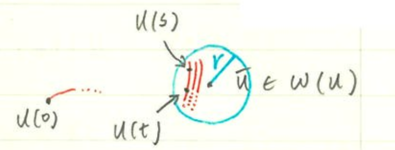
r を条件II, IIIが同時に成り立つ半径とする。
$0 \leqq s \leqq t$ を $s \leqq \forall \tau \leqq t$ について $u(\tau) \in B^Y(\bar{u}; r)$ が成り立つ2つの時点とする。
このとき、

(***) $$L\|u(t) - u(s)\|_Y^{\frac{2}{\alpha}} \leqq \|u(t) - u(s)\|_{Z^*}$$

$$\leqq (D\theta\delta)^{-1}\left\{[\Phi(u(s)) - \Phi(\bar{u})]^\theta - [\Phi(u(t)) - \Phi(\bar{u})]^\theta\right\}$$

とする。
ただし L は定数。

$|\Phi(u(t)) - \Phi(\bar{u})|^\theta \searrow 0$



[証明]

$s \leqq \tau \leqq t$ である $u(\tau)$ について、$\Phi(u(s)) > \Phi(u(t))$ であるから、

$$\frac{d}{d\tau}[\Phi(u(t)) - \Phi(\bar{u})]^\theta = \theta[\Phi(u(\tau)) - \Phi(\bar{u})]^{\theta-1}\frac{d}{d\tau}\Phi(u(\tau))$$

$$= \theta[\Phi(u(\tau)) - \Phi(\bar{u})]^{\theta-1}\left(\Phi'(u(\tau)), \frac{du}{d\tau}(\tau)\right).$$

II, IIIより、

$$-\frac{d}{d\tau}[\Phi(u(\tau)) - \Phi(\bar{u})]^\theta = -\theta[\Phi(u(\tau)) - \Phi(\bar{u})]^{\theta-1}\left(\Phi'(u(\tau)), \frac{du}{d\tau}(\tau)\right)$$

$$\geq \theta\left[\Phi(u(\tau))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta-1}\delta\,\|\Phi'(u(\tau))\|_{Y^*}\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{Z^*}$$

$\|\Phi'(u)\|_{Y^*}|\Phi(u)-\Phi(\bar{u})|^{\theta-1} \geq D,$
$(u \neq \bar{u})$

$$\geq \delta\theta D\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{Z^*}$$

τについて積分すると、

$$\left[\Phi(u(s))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta}-\left[\Phi(u(t))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta}$$

$$\geq \delta\theta D\int_s^t\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{Z^*}d\tau$$

$$\geq \delta\theta D\left\|\int_s^t\frac{du}{d\tau}(\tau)\,d\tau\right\|_{Z^*}$$

よって(***)の後の不等式が示された.
前の不等式については、

$$\|u(t)-u(s)\|_Y \leq C\cdot\tilde{C}^{1-\alpha}\|u(t)-u(s)\|_Z^{\frac{1+\alpha}{2}}\|u(t)-u(s)\|_{Z^*}^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

より導かれる □

この命題より、$u(t)$が$\bar{u}$に十分近づくと、以降ずっと$\bar{u}$の近くに留まることが示される.
実際, $u(t_n)\to\bar{u}$から時点t_Nを

$$\|u(t_N)-\bar{u}\|_Y \leq \frac{r}{3}$$

$$(LD\delta\theta)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left[\Phi(u(t_N))-\Phi(\bar{u})\right]^{\frac{(1-\alpha)\theta}{2}} \leq \frac{r}{3}$$

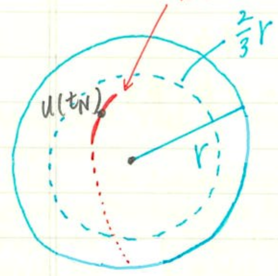
が成り立つように固定する.
そうすると、$^\forall\tau\in[t_N,t]$について$u(\tau)\in B(\bar{u};r)$とすると、

$$\|u(t)-\bar{u}\|_Y \leq \|u(t)-u(t_N)\|_Y+\|u(t_N)-\bar{u}\|_Y$$

$$\leq (LD\delta\theta)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left[\Phi(u(t_N))-\Phi(\bar{u})\right]^{\frac{(1-\alpha)\theta}{2}}+\frac{r}{3}$$

$$\leq \frac{2}{3}r.$$

軌道は$\frac{2}{3}r$の中に留まる



これは、

$$u(t)\in B^Y(\bar{u};\tfrac{2}{3}r),\quad {}^\forall t\in[t_N,\infty)$$

を示す.

定理.
$\bar{u}\in\omega(u)$は上の条件I, II, IIIをみたすとする. このとき

$$\|u(t)-\bar{u}\|_{Z^*} \leq (D\theta\delta)^{-1}\left[\Phi(u(t))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta},\quad {}^\forall t\in[t_N,\infty)$$

[証明]
$t_N \leq t \leq t_n$とする.
$s=t$, $t=t_n$で上の命題を適用すると、

$$\|u(t_n)-u(t)\|_{Z^*} \leq (D\theta\delta)^{-1}\left\{\left[\Phi(u(t))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta}-\left[\Phi(u(t_n))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta}\right\}$$

$t_n\to\infty$とすると、

$$\|\bar{u}-u(t)\|_{Z^*} \leq (D\theta\delta)^{-1}\left[\Phi(u(t))-\Phi(\bar{u})\right]^{\theta}.$$ □

4.3. 仮定IIIについて

$\bar{u}$の近傍で$\Phi: G\to\mathbb{R}$は2回Frechet微分可能とする.

$$\Phi': G\to\mathcal{L}(Y;\mathbb{R})=Y'\approx Y^*$$

より、$\Phi'': G\to\mathcal{L}(Y,Y^*)$である.

そこで、$L=\Phi''(\bar{u})\in\mathcal{L}(Y,Y'')$とおく.

定理. (Chill [文献2])
LはFredholm作用素, i.e.,

(1) $K(L)$は有限次元をもつ.

(2) $R(L)$はY^*の閉部分空間で有限な余次元をもつ.

である.

$P: X \to X$ を X から $K(L)$ への直交射影とする.
P は Y から $K(L)$ への射影，Y^* から $K(L)$ への射影へ拡張される.

さらに、

$$\mathcal{S} = \{u \in B^Y(\bar{u}; r); (I-P)\Phi'(u) = 0\}$$

とおくと、$\mathcal{S}$ は $\dim \mathcal{S} = \dim K(L)$ の微分可能な多様体となる.

このとき、$\mathcal{S}$ が解析的多様体で $\Phi|_{\mathcal{S}}$ が解析的ならば、Φ は $\bar{u}$ の近傍で L-S 評価式を満たす.

References

[1] S. Azizi and A. Yagi, *Dynamical system for growing crystal surface model under Dirichlet conditions*, in preparation.

[2] R. Chill, *The Lojasiewicz-Simon gradient inequality on Hilbert spaces*, Proc. 5th European-Maghrebian Workshop on Semigroup Theory, Evolution Equations and Applications, 2006, 25–36.

[3] H. Fujimura and A. Yagi, *Dynamical system for BCF model describing crystal surface growth*, Vestnik Chelyab. Univ. Ser. 3 Mat. Mekh. Inform. **10**(2008), 75–88.

[4] H. Fujimura and A. Yagi, *Asymptotic behavior of solutions for BCF model describing crystal surface growth*, Int. Math. Forum **3**(2008), 1803–1812.

[5] H. Fujimura and A. Yagi, *Homogeneous stationary solution for BCF model describing crystal surface growth*, Sci. Math. Jpn. **69**(2009), 295–302.

[6] M. Grasselli, G. Mola and A. Yagi, *On the longtime behavior of solutions to a model for epitaxial growth*, Osaka J. Math. **48**(2011), 987–1004.

[7] A. Haraux and M. A. Jendoubi, *The Lojasiewicz gradient inequality in the infinite-dimensional Hilbert space framework*, J. Funct. Anal. **260**(2011), 2826–2842.

[8] M. D. Johnson, C. Orme, A. W. Hunt,D. Graff,J. Sudijono, L. M. Sauder, and B. G. Orr, *Stable and unstable growth in molecular beam epitaxy*, Phys. Rev. Lett. **72**(1994), 116–119.

[9] S. Lojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels*, Colloques internationaux du C. N. R. S: Les équations aux dérivées partielles, Paris(1962), Editions du C. N. R. S., Paris 1963, pp. 87–89.

[10] W. W. Mullins, *Theory of thermal grooving*, J. Applied Phys. **28**(1957), 333–339.

[11] K. Osaki and A. Yagi, *Finite dimensional attractors for one-dimensional Keller-Segel equations*, Funkcial. Ekvac. **44**(2001), 441–469.

[12] R. L. Schwoebel and E. J. Shipsey, *Step motion on crystal surfaces*, J. Appl. Phys. **37**(1966), 3682–3686.

[13] T. Shirai, L. H. Chuan and A. Yagi, *Asymptotic behavior of solutions for forest kinematic model under Dirichlet conditions*, Sci. Math. Jpn. **66**(2007), 289–301.

[14] A. Yagi and M. Primicerio, *A modified forest kinematic model*, Vietnam J. Math. Anal. **12**(2014), 105–116.

[15] R. Dautray and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[16] H. Tanabe, *Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Marcel-Dekker, 1997.

[17] R. Temam *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1997.

[18] M. Uwaha, *Study on Mechanism of Crystal Growth*, Kyoritsu Publisher, 2002 (in Japanese).

[19] A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*, Springer, 2010.

[20] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1966.