反応拡散方程式に対する自由境界問題

早稲田大学　理工学術院　山田義雄

第５回偏微分方程式レクチャシリーズ

in 福岡工大

2017年**5**月**13**日〜**5**月**14**日

1. 自由境界問題とその背景

● 自由境界問題

次のシステムを満たす $u = u(x,t)$ と $h = h(t)$ を求めよ：

$$
\text{(FBP)} \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq h_0, \end{cases}
$$

d, μ: 正定数,

$h_0 > 0, u_0 \in C^2[0,h_0], (u_0)_x(0) = u_0(h_0) = 0, \ \ u_0 \geq 0 \quad \text{in} \ \ [0,h_0]$.

注意

$x = 0$ における境界条件を

$$u(t,0) = 0$$

で置き換えることもある. (この場合 (FBP)_D と表す)

問題の由来

Yihong Du-Zhigui Lin (2010): 生物の侵入をモデルとする自由境界問題の提唱

- 個体数密度 $u(t,x)$
- 生息領域 $I_t = [0, h(t)]$ その前線 $\Rightarrow$ $x = h(t)$ 自由境界

$$
(\mathrm{FB})_\mathrm{N} \begin{cases} u_t = du_{xx} + u(a - bu), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le h_0, \end{cases}
$$

a, b, d, μ: 正定数,

$h_0 > 0, u_0 \in C^2[0, h_0], u_0'(0) = u_0(h_0) = 0, \quad u_0 \ge 0 \quad \text{in} \quad [0, h_0].$

Diffusion model for invasion of muskrats

- Skellam (1951)

Model for muskrat dispersal and biological invasion in central Europe

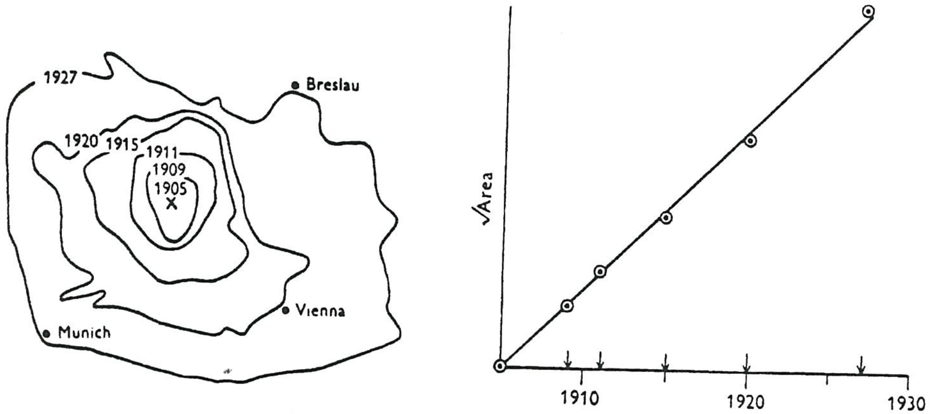


FIGURE 6.12. Spread of muskrats in Europe. (Left): Apparent boundaries of muskrat dispersal for various years. (Right): Relation between the effective radius of inhabitation and time. The circles are observed values, and the line is based on the theory (from Skellam, 1951).

Okubo-Levin, ``Diffusion and Ecological Problems"

生物の侵入モデルのについての従来の解析

- 反応拡散方程式の進行波解

$$u_t = du_{xx} + f(u)$$

$u = w(x - ct)$ の形の解を求める：$f(0) = f(1) = 0$ を仮定すると

$$\begin{cases} dw'' + cw' + f(w) = 0, \quad w(z) > 0 \quad \text{for} \quad z \in R, \\ \lim_{z \to -\infty} w(z) = 1, \quad \lim_{z \to \infty} w(z) = 0 \end{cases}$$

を満たす (w, c) を求めることに帰着される.

難点

- 生息領域がクリアでない
- $f(u) = au(1-u)$ のようなケースでは侵入は必ず成功する（非現実的)

Stefan 型境界条件の意味

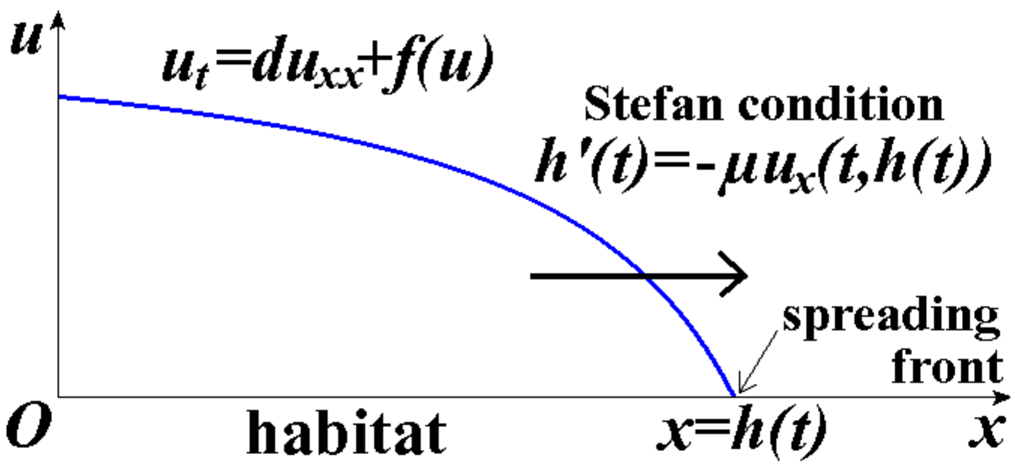
$h'(t) = -\mu u_x(t, h(t))$: **Stefan** 条件

$u(t,x) > 0$ **in** $(0, h(t))$ **with** $u(t,h(t)) = 0$

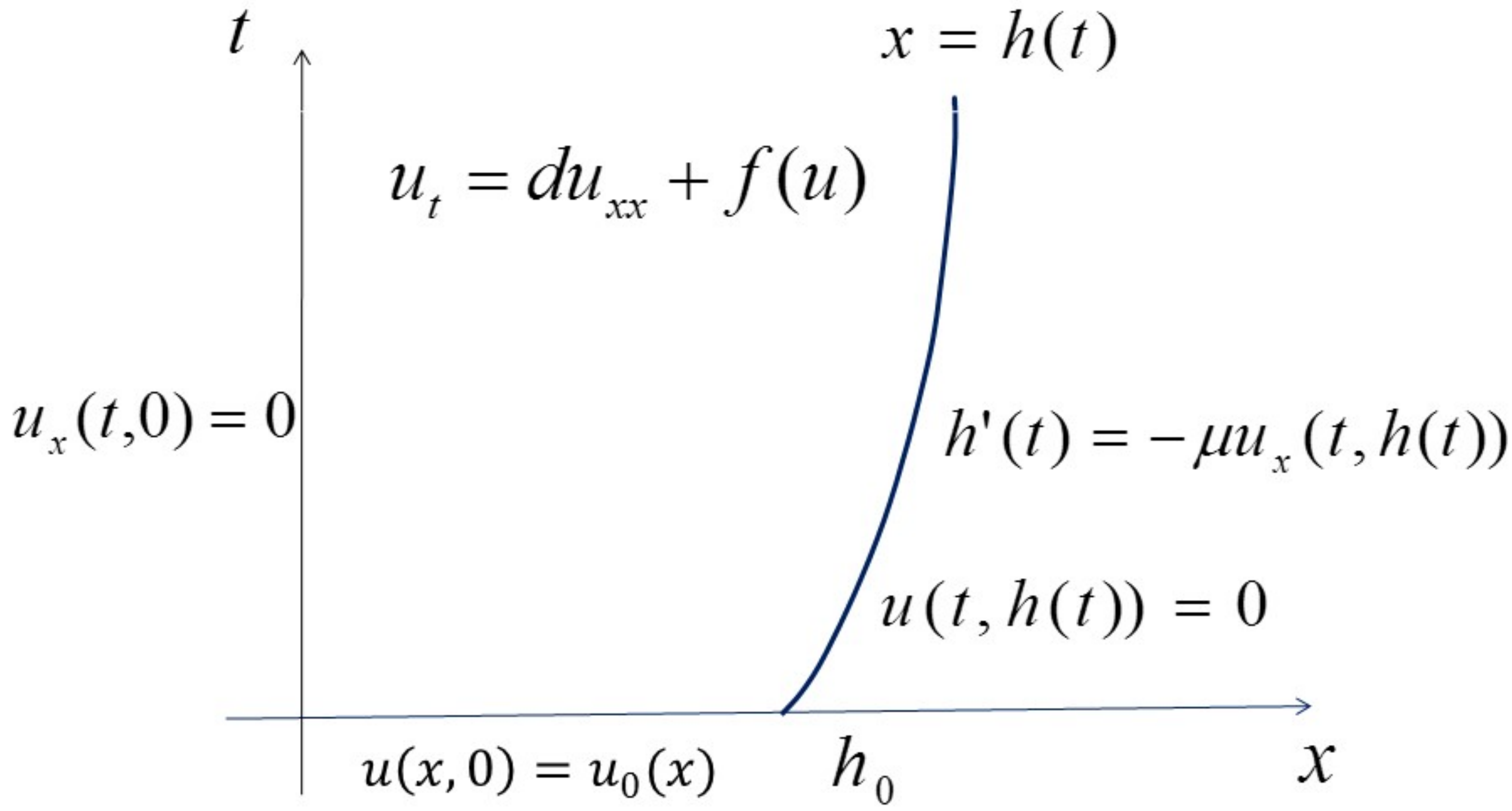
$\Rightarrow \quad u_x(t,h(t)) < 0$ **(**強最大値原理より**)**

$\Rightarrow \quad h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)) > 0$:

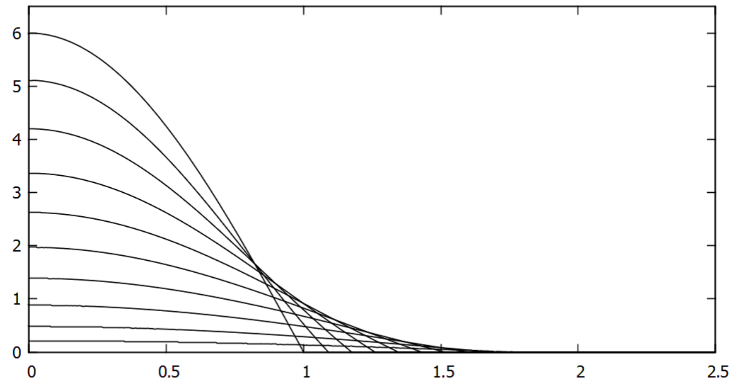
境界における，個体数圧力が自由境界の駆動力となる.



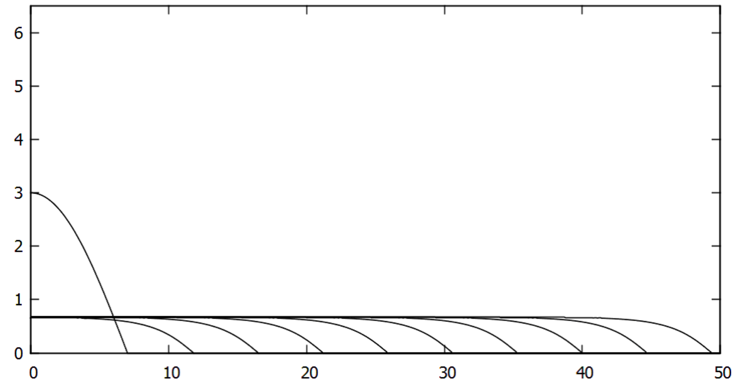
Free boundary problem



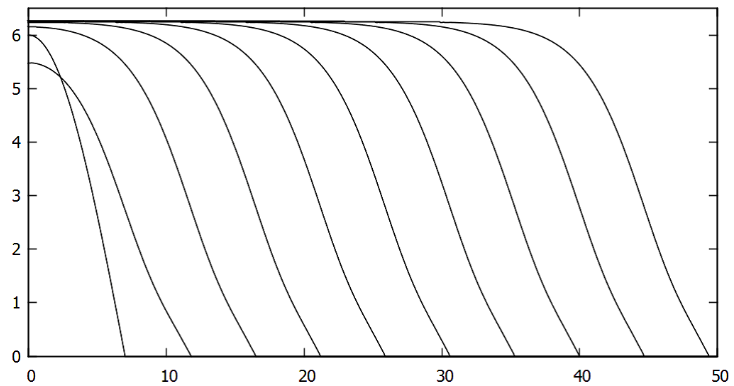
正値双安定型 f に関する数値シミュレーション



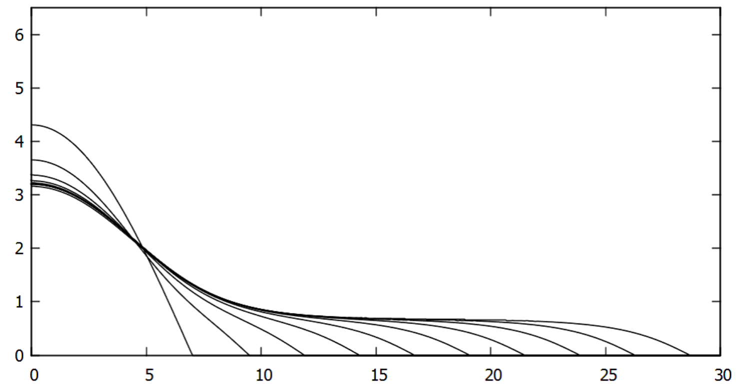
Vanishing



Small spreading



Big spreading



Transition

解 $u = u(x,t)$ のグラフ (縦軸: u, 横軸： x) : **Y. Kawai '15**

自由境界問題 (FBP) に対する研究課題

反応項 f: $f(u)$ は局所 Lipschitz 連続，$f(0) = f(1) = 0$

$$f(u) < 0 \quad \text{for } u > 1$$

1 次元自由境界問題に限定

- (FBP) は時間大域解 (u, h) を持つことを示せ.
- $t \to \infty$ での $(u(t,\cdot), h(t))$ の挙動を調べよ．解の挙動の分類は可能か？
  ((u, h); vanishing, spreading,...)
- 自由境界が有界にとどまる条件と無限に拡がる条件を求めよ.
  それぞれの場合の $u(t,\cdot)$ の振る舞いを調べよ.
- 自由境界 $h(t)$ が無限に拡がる場合，$h(t)$ の展開速度を求めよ.
- 自由境界が無限に拡がる場合，$u(t,x)$ の漸近的プロファイルを求めよ
- $\cdots\cdots\cdots$

参考文献–1 次元空間のケース–

1. Yihong Du and Zhigui Lin; Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 42(2010), 377-405.

2. Yihong Du and Bendong Lou; Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries, J. Eur. Math. Soc. 17(2015), 2673-2724.

3. Yihong Du, Hiroshi Matsuzawa and Maolin Zhou; Sharp estimates of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems, SIAM J. Math. Anal. 46(2014), 375-396.

4. Xiaowei Liu and Bendong Lou; On a reaction-diffusion equation with Robin and free boundary conditions, J. Differential Equations, 259(2015), 423-451.

5. Yuki Kaneko and Yoshio Yamada; A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in ecology, Adv. Math. Sci. Appl., 21(2011), 467-492.

6. Yusuke Kawai and Yoshio Yamada; Multiple spreading phenomena for a free boundary problem of a reaction-diffusion equation with a certain class of bistable nonlinearity, J. Differential Equations, 261 (2016), 538-572.

2. 自由境界問題に対する基本的結果 I

$$
\text{(FBP)} \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le h_0, \end{cases}
$$

f: 局所 **Lipschitz** 連続な関数で, $f(0) = f(1) = 0$ かつ：

$$
f(u) < 0 \quad \text{for} \quad u > 1.
$$

- f の例： $f(u) = au(1-u), a > 0$ （ロジスティック型）
  $f(u) = au(u-\theta)(1-u), a > 0, 0 < \theta < 1/2$ （双安定型）

初期値: $h_0 > 0$ および $u_0 \in C^2[0, h_0]$

$$
(u_0)_x(0) = u_0(h_0) = 0, \quad u_0 \ge 0 \quad \text{in} \quad [0, h_0].
$$

反応項 f の例

$$u_t = du_{xx} + f(u)$$

$f \in C^1[0, \infty)$ は以下の条件を満たすものとする：

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{for} \quad f(u) < 0 \quad \text{for} \quad u > 1.$$

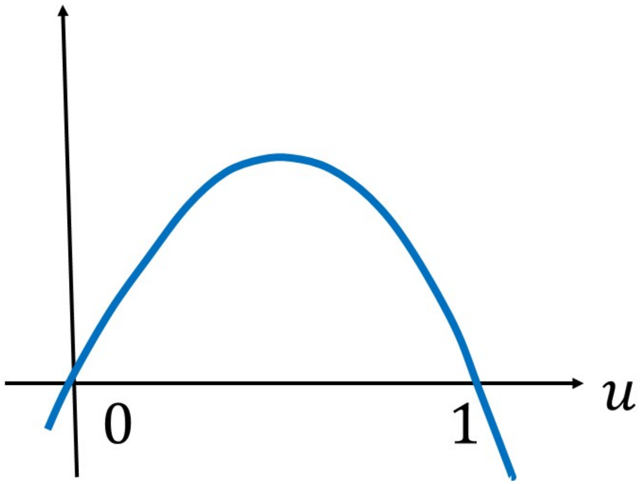
(A) ロジスティック(logistic)型(単安定(monostable)型)

$$f(0) = f(1) = 0, f'(0) > 0, f'(1) < 0,$$
$$\text{and } (1-u)f(u) > 0 \text{ for } u \neq 0, 1.$$

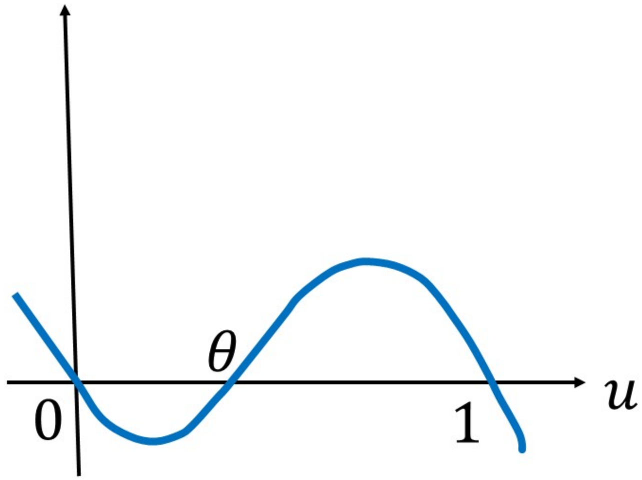
(B) 双安定(bistable)型

$$f(0) = f(\theta) = f(1) = 0 \quad \text{with} \quad \theta \in (0, 1),$$
$$f'(0) < 0, f'(1) < 0, f(u) \neq 0 \text{ for } u \neq 0, \theta, 1,$$
$$\text{and } \int_0^1 f(u)du > 0.$$

反応項 f の例



(A) ロジスティック型



(B) 双安定型

$$\int_0^1 f(u)du > 0$$

大域解の存在と一意性

定理 2.1 (Du-Lin '10)

(FBP) は次のクラスの解 (u,h) を唯一つ持つ：

$$(u,h) \in \{C^{(1+\alpha)/2,1+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\Omega)\} \times C^{1+\alpha/2}[0,\infty).$$

ここで α は $\alpha \in (0,1)$ をみたす任意の実数，$\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ t > 0, 0 \le x \le h(t)\}$.

さらに，(u,h) は次を満たす.

(i) 次の評価をみたす正定数 C_1, C_2 が存在する：

$$0 < u(t,x) \le C_1 \quad \text{for} \quad t > 0, \quad 0 < x < h(t),$$
$$0 < \dot{h}(t) \le C_2 \quad \text{for} \quad t > 0.$$

(ii) $u_x(t,x) < 0 \quad \text{for } t > 0,\ x \ge h_0.$

定理 2.1 の証明のアイデア

- 局所解の存在
  自由境界を固定境界へ写す変数変換
  固定境界の問題への書き換え
  Banach の不動点定理の適用
- 放物型方程式の解の正則性
- 大域解の存在
  解のアプリオリ評価——比較定理の適用

固定境界問題への書き換え

変数変換 $x = h(t)y$:

$$0 < x < h(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < y < 1$$

$v(t,y) = u(t, h(t)y)$ とおくと (FBP) は次の問題に帰着：

$$(2.1) \qquad \begin{cases} v_t = \dfrac{d}{h(t)^2} v_{yy} + \dfrac{\dot{h}(t)y}{h(t)} v_y + f(v), & t > 0,\ 0 < y < 1, \\ v_y(t,0) = v(t,1) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\dfrac{\mu}{h(t)} v_y(t,1), & t > 0, \\ h(0) = h_0,\ v(0,y) = v_0(y), & 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

(ただし $v_0(y) = u_0(h_0 y)$)

注意

h の条件は次と同値である：$h(t) = h_0 - \mu \displaystyle\int_0^t \frac{v_y(s,1)}{h(s)} ds$

Banach の不動点定理の適用

$$K_1 = \{v \in C([0,T] \times [0,1]);\ \sup_{0 \le t \le T} \|v(t) - v_0\|_{C[0,1]} \le 1\},$$
$$K_2 = \{h \in C^1[0,T];\ h(0) = h_0,\ \sup_{0 \le t \le T} |\dot{h}(t) - \dot{h}(0)| \le 1\}$$

(ただし $\dot{h}(0) = -\mu(u_0)_x(h_0)$). $(v, h) \in K_1 \times K_2$ に対し

$$\begin{cases} \hat{v}_t = \dfrac{d}{h(t)^2}\hat{v}_{yy} + \dfrac{\dot{h}(t)y}{h(t)}\hat{v}_y + f(v), & t > 0,\ 0 < y < 1, \\ \hat{v}_y(t,0) = \hat{v}(t,1) = 0, & t > 0, \\ \hat{v}(0,y) = v_0(y), & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

の解を $\hat{v}(t,y)$ とする. $\hat{h}$ を次で定義する：

$$\hat{h}(t) = h_0 - \mu \int_0^t \frac{\hat{v}_y(s,1)}{h(s)} ds$$

Banach の不動点定理の適用

$\boldsymbol{K_1 \times K_2}$ 上の写像 $\boldsymbol{\Phi}$ を定義：

$$\boldsymbol{\Phi(v,h) = (\hat{v}, \hat{h})}$$

$\boldsymbol{\Phi : \ K_1 \times K_2 \to K_1 \times K_2}$, **strict contraction**

if $\boldsymbol{T > 0}$ is sufficiently small

$\boldsymbol{\Phi}$ の不動点 $\boldsymbol{(v^*, h^*) \in K_1 \times K_2}$ の一意的存在

$$\Downarrow$$

(2.1) の局所解 $\boldsymbol{(v^*.h^*)}$ の存在

命題 2.1

任意の初期値 $\boldsymbol{(u_0, h_0)}$ に対して正定数 $\boldsymbol{T}$ が存在し，**(FBP)** は $\boldsymbol{[0, T]}$ 上の解 $\boldsymbol{(u,h)}$ を唯一つ持つ.

解のアプリオリ評価

(u,h): (FBP) の $[0,T]$ 上の解

- u の正値性

  $u_0 \geq 0, \quad f(0)=0 \quad \Rightarrow$ (最大値原理) $u(t.x) \geq 0$

- u の有界性

  w : 次の境界値問題の解

$$
\begin{cases}
w_t = dw_{xx} + f(w), & t>0, x>0, \\
w_x(t,0) = 0, & t>0, \\
w(0,x) = \|u_0\|_{C[0,h_0]}, & x>0
\end{cases}
$$

(実はODEの解). 比較定理より

$$
u(t,x) \leq w(t,x) = w(t) \leq \max\{1.\|u_0\|_{C[0,h_0]}\} := C_1
$$

自由境界の評価

領域

$$D_T = \{(t,x);\ 0 \le t \le T,\ h(t) - \delta \le x \le h(t)\}$$

$(\delta > 0$ は後で決める）において比較関数 u^* を構成する：

$$u^*(t,x) = \frac{C_1}{\delta^2}(h(t) - x)(x - h(t) + 2\delta)$$

D_T において

$$u_t^* = 2C_1 \dot{h}(t)(x - h(t) + \delta)/\delta^2 \ge 0, \qquad u_{xx}^* = -2C_1/\delta^2$$

および $0 \le u^*(t,x) \le C_1$ に注意すると

$$u_t^* - du_{xx}^* - f(u^*) \ge \frac{2dC_1}{\delta^2} - f(u^*) \ge \frac{2dC_1}{\delta^2} - \sup_{0 \le u \le C_1} f(u) \ge 0$$

if δ is small.

自由境界の評価

領域 D_T の側面（境界）において

$$u^*(t,h(t)-\delta) = C_1 \geq u(t,h(t)-\delta), \qquad u^*(t,h(t) = 0 = u(t,h(t))$$

初期時刻 $t=0$ において

$$u^*(0,x) = \frac{C_1}{\delta^2}(h_0 - x)(x - h_0 + 2\delta) \geq u_0(x) \quad \text{for} \quad h_0 - \delta \leq x \leq h_0$$

if δ is small. 比較定理より

$$u^*(t,x) \geq u(t,x) \quad \text{in } D_T, \quad \text{かつ} \quad u^*(t,h(t)) = u(t,h(t)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 > u_x(t,h(t)) \geq u^*_x(t,h(t)) = -\frac{2C_1}{\delta}$$

したがって

$$0 < \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)) \leq \frac{2\mu C_1}{\delta}$$

解のアプリオリ評価

命題 2.2

(u,h) を **(FBP)** の $[0,T]$ 上の解とする．このとき $\|u_0\|_{C[0,h_0]}$ のみに依存する正定数 C_1 と，$d,\mu,\|u_0\|_{C^1[0,h_0]}$ のみに依存する正定数 C_2 が存在して

$$0 < u(t,x) \leq C_1, \quad 0 < \dot{h}(t) \leq C_2$$

for $0 < t \leq T,\ 0 < x < h(t)$.

命題 **2.1**，命題 **2.2** $\Rightarrow$ 解の延長・大域解の存在

自由境界問題の比較定理

定理 2.2

(u_1, h_1) は次の関係を満たす：

$$\begin{cases} (u_1)_t \geq d_1(u_1)_{xx} + f(u_1), & 0 < t < T.\ 0 < x < h_1(t), \\ (u_1)_x(t,0) \leq 0,\ \ u_1(t, h_1(t)) = 0, & 0 < t < T, \\ \dot{h}_1(t) \geq -\mu(u_1)_x(t, h_1(t)), & 0 < t < T. \end{cases}$$

一方 (u_2, h_2) は逆の不等式を満たすとする．このとき

$$h_1(0) \geq h_2(0), \quad u_1(0,x) \geq u_2(0,x) \geq 0,\ \ 0 < x < h_2(0),$$

が満たされるならば，

$h_1(t) \geq h_2(t)$ および $u_1(t,x) \geq u_2(t,x),\ 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq h_2(t)$

が私立する．

• 定理**2.2**の証明:

$h_1(0) > h_2(0)$ のとき背理法で $h_1(t) > h_2(t)$ を示す.

$\exists T^* \in (0, T)$ **s.t.**

$$h_1(t) > h_2(t), \ \ 0 \le t < T^* \quad \text{かつ} \quad h_1(T^*) = h_2(T^*)$$

と仮定 $\qquad \Rightarrow \dot{h}_1(T^*) \le \dot{h}_2(T^*)$.

一方,(通常の)比較定理より

$$u_1(t, x) > u_2(t, x), \quad 0 < t \le T, \ \ 0 < x < h_2(t)$$

強最大値原理より

$$(u_1)_x(T^*, h_1(T^*)) < (u_2)_x(T^*, h_2(T^*))$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{h}_1(T^*) = -\mu(u_1)_x(T^*, h_1(T^*)) > -\mu(u_2)_x(T^*, h_2(T^*)) = \dot{h}_2(T^*)$$

これは $\dot{h}_1(T^*) \le \dot{h}_2(T^*)$ に矛盾:

$$h_1(t) > h_2(t) \quad \text{for} \quad 0 \le t \le T$$

- 定理**2.2**の証明**(**続き）：
  領域 $0 < t \leq T, 0 < x < h_2(t)$ における（通常の）比較定理より

$$u_1(t, x) > u_2(t, x)$$

注意

定理 **2.2** の (u_1, h_1) が $h_1(0) \geq h_0$ および $u_1(0, x) \geq u_0(x)$ を満たせば，(u_1, h_1) を **(FBP)** の **supersolution (upper solution,** 優解）という.
(u_2, h_2) が (u_1, h_1) と逆の不等式を満たせば，(u_2, h_2) を **(FBP)** の **subsolution (lower solution,** 劣解）という

エネルギー等式

定理 2.3 (Kaneko - Y, '11)

(u,h) を **(FBP)** の解とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{2}\|u_x(t)\|^2_{L^2(0,h(t))} + \int_0^t \|u_t(\tau)\|^2_{L^2(0,h(\tau))} d\tau + \frac{d}{2\mu^2}\int_0^t \dot{h}(\tau)^3 d\tau \\
= \frac{d}{2}\|u_{0,x}\|^2_{L^2(0,h_0)} + \int_0^{h(t)} F(u(t,x))dx \\
- \int_0^{h_0} F(u_0(x))dx,
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $F(u) = \int_0^u f(v)dv$.

- 定理2.3の証明：(FBP)の第1方程式と u_t の L^2 内積をとる：

$$\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,h(t))} = d\int_0^{h(t)} u_{xx}u_t\ dx + \int_0^{h(t)} f(u)u_t\ dx$$

ここで

$$\begin{aligned} d\int_0^{h(t)} u_{xx}u_t\ dx &= d[u_x(t,x)u_t(t,x)]_0^{h(t)} - d\int_0^{h(t)} u_x u_{tx} dx \\ &= du_x(t,h(t))u_t(t,h(t)) - \frac{d}{2}\int_0^{h(t)} \partial_t(u_x^2) dx \end{aligned}$$

自由境界での関係式 $u(t,h(t)) = 0$ を t で微分すれば

$$u_t(h(t)) + u_x(t,h(t))\dot{h}(t) = 0 \tag{2.2}$$

したがって (2.2) より

$$du_x(t,h(t))u_t(t,h(t)) = -du_x(t,h(t))^2\dot{h}(t)$$

$$-\frac{d}{2}\int_0^{h(t)} \partial_t(u_x^2)dx = -\frac{d}{2}\times\frac{d}{dt}\int_0^{h(t)} u_x^2\ dx + \frac{d}{2}u_x^2(t,h(t))\dot{h}(t)$$

さらに

$$\begin{aligned}\int_0^{h(t)} f(u)u_t\ dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t}F(u)dx &= \frac{d}{dt}\int_0^{h(t)} F(u)dx - F(u(t,h(t))\dot{h}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^{h(t)} F(u)dx\end{aligned}$$

以上の関係式を整理すると

$$\frac{d}{2}\frac{d}{dt}\|u_x(t)\|^2_{L^2(0,h(t))}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,h(t))}+\frac{d}{2\mu^2}\dot{h}(t)^3 = \frac{d}{dt}\int_0^{h(t)} F(u)dx$$

この等式を $[0,t]$ で積分すればよい.

3. 基本的結果 II—解の漸近挙動

定理2.1により(FBP)は時間大域解 (u, h) を一意的に持つ.

当面の課題

(FBP) の解 $(u(t,x), h(t))$ の $t \to \infty$ での挙動を調べよ.

$t \to h(t)$: 単調増加;

$$\exists h_\infty = \lim_{t\to\infty} h(t) \in (0, \infty] :$$

- $h_\infty < \infty$ または $h_\infty = \infty$ の判定法は？
- $h_\infty < \infty$ または $h_\infty = \infty$ に応じて u の振る舞いはどう変わるか？
- $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$ は何か?

解の挙動—分布拡大(spreading) と絶滅(vanishing)

(u,h) : **(FBP)** の解とする.

分布の拡大(spreading) (侵入の成功)

$h_\infty := \infty$ および $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \alpha^* > 0$ $[0,\infty)$ で広義一様収束

ここで α^* は f の零点. (u,h) を **spreading** 解と呼ぶ.

絶滅(vanishing) (侵入の失敗)

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0$$

(u,h) を **vanishing** 解と呼ぶ.

解の挙動—vanishing

定理 3.1 (Kaneko - Y, '11)

(FB) の任意の解 (u, h) について，$h_\infty < \infty$ ならば，

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0.$$

注意

逆の関係

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} h(t) < \infty$$

を示すこともできる.

- 定理 3.1 の証明: 定理 2.3 のエネルギー等式を利用:

$$\frac{d}{2}\|u_x(t)\|^2_{L^2(0,h(t))} + \int_0^t \|u_t(\tau)\|^2_{L^2(0,h(\tau))} d\tau + \frac{d}{2\mu^2}\int_0^t \dot{h}(\tau)^3 d\tau$$
$$= \frac{d}{2}\|u_{0,x}\|^2_{L^2(0,h_0)} + \int_0^{h(t)} F(u(t,x))dx$$
$$- \int_0^{h_0} F(u_0(x))dx,$$

$h_\infty < \infty$ を仮定すると定理 2.1 より $0 < u(t,x) \le C_1$ だから

$$\sup_{t\ge 0}\int_0^{h(t)} F(u(t,x))dx \le C^* < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty \left\{\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,h(t))} + \dot{h}(t)^3\right\} dt < \infty$$

$$\int_0^\infty \left\{ \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,h(t))} + \dot{h}(t)^3 \right\} dt < \infty.$$

$\|u_t(t)\|_{L^2(0,h(t))}$ および $\dot{h}(t)$ の t に関する一様連続性を利用する;

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t(t)\|_{L^2(0,h(t))} = \lim_{t\to\infty} \dot{h}(t) = 0.$$

$\sup_{t\geq 0} \|u_x(t)\|_{L^2(0,h(t))} < \infty$ に注意すると，放物型方程式に対する正則性より

$\{u(\cdot,t)\}_{t\geq 1}$ は $C^1(K)$ においてて相対コンパクト,

ただし K は $[0,h_\infty)$ における任意のコンパクト集合. $(u^*, h_\infty) \in \omega(u_0, h_0)$ (適当な位相での ω 極限集合）とすると u^* は次を満たす：

$$\begin{cases} du^*_{xx} + f(u^*) = 0, \ 0 < x < h_\infty, \\ u^*_x(0) = u^*(h_\infty) = 0, \\ u^*_x(h_\infty) = 0 \end{cases}$$

u^* の満たす関係

$$\begin{cases} du^*_{xx} + f(u^*) = 0, \ 0 < x < h_\infty, \\ u^*(h_\infty) = u^*_x(h_\infty) = 0 \end{cases}$$

ODEの初期値問題に対する解の一意性を用いれば

$$u^* \equiv 0.$$

したがって

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0.$$

解の挙動——vanishing の十分条件

定理 3.2

初期値 (u_0, h_0) は $\pi^2/4h_0^2 - f'(0) > 0$ を満たすとする．このとき $\|u_0\|_{C[0,h_0]}$ が十分小さいならば，**(FBP)** の解 (u, h) は **vanising** 解となる．

- 証明の方針: 比較関数

$$k(t) = A - Be^{-\alpha t}, \qquad v(t,x) = Ce^{-\alpha t}\cos\left(\pi x/2k(t)\right)$$

とおく．$v_x(t,0) = v(t,k(t)) = 0$．さらに $\forall\varepsilon > 0$ に対し C が十分小さければ

$$v_t - dv_{xx} - f(v) \geq v\left(d\pi^2/4A^2 - \alpha - f'(0) - \varepsilon\right)$$
$$\hat{k}(t) + \mu v_x(t,k(t)) \geq e^{-\alpha t}\left(B\alpha - \mu C\pi/2(A-B)\right)$$

$d\pi^2/4A^2 - f'(0) > 0$ のとき α, C を十分小さくとれば，(v,k) は **supersolution** となる．

解の挙動—spreading の十分条件

$\ell > 0$ に対して次の境界値問題

$$(\mathrm{SP})_\ell \qquad \begin{cases} d\varphi'' + f(\varphi) = 0, & 0 < x < \ell, \\ \varphi'(0) = \varphi(\ell) = 0 \end{cases}$$

は正値解 $\varphi(x;\ell)$ を持つとする.

定理 3.3 (Kaneko - Y, '11)

正数 $\ell > 0$ に対し (φ, ℓ) を **(SP)**$_\ell$ の正値解とする．$(u_0, h_0) = (\varphi, \ell)$ に対する **(FBP)** の解 (u, h) について次の性質が成り立つ.

(i) $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$

(ii) $t \to u(t,x)$ は単調増加

(iii) $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v^*(x) \quad [0,\infty)$ で広義一様収束，ただし v^* は

$$(\mathrm{SP}) \quad dv'' + f(v) = 0, \qquad v > 0 \quad \text{for} \quad x > 0, \qquad v'(0) = 0$$

の単調非増加な解のうち $v^* \geq \varphi$ を満たす極小解である.

解の挙動–spreading (2)

系 3.1 (Kaneko - Y, '11)

φ を **(SP)**$_\ell$ の正値解とする．初期データ (h_0, u_0) は次の関係をみたすとする：

$$h_0 \geq \ell \quad \text{および} \quad u_0(x) \geq \varphi(x) \quad \textbf{in} \quad [0, \ell].$$

このとき **(FBP)** の解 (u, h) は

$$h_\infty = \infty \quad \text{および} \quad \liminf_{t \to \infty} u(t, x) \geq v^*(x) \quad \textbf{for} \quad x > 0,$$

を満たす．ただし，v^* は定理**3.3**における解である．

注意

(SP)の正値解が $v^* \equiv 1$ のみならば，定理**3.3**，系**3.1**の解 (u, h) は

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = 1 \quad [0, \infty) \quad \text{で広義一様収束}$$

- 定理3.2の証明:　$(u_2(t,x),h_2(t))=(\varphi(x),\ell)$ とおくと：

$$\begin{cases} (u_2)_t = 0 = d(u_2)_{xx} + f(u_2), \\ (u_2)_x(t,0) = (u_2)(t,h_2(t)) = 0, \\ \dot{h}_2(t) = 0 < -\mu (u_2)_x(t,h_2(t)) \end{cases}$$

よって (u_2,h_2) は **(FBP)** の **subsolution** となり，比較定理（定理2.2）によって

$$h(t) > h_2(t) = \ell, \quad u(t,x) > u_2(t,x) = \varphi(x).$$

とくに $t=\delta>0$ とすれば

$$h(\delta) > \ell, \quad u(\delta,x) > \varphi(x).$$

$(u(t+\delta,x),h(t+\delta))$ は $(u(\delta,x),h(\delta))$ を初期値とする **(FBP)** の解とみて，再度比較定理を適用する：

$$h(t+\delta) > h(t), \quad u(t+\delta,x) > u(t,x)$$

比較定理より：

$$h(t+\delta) > h(t), \quad u(t+\delta, x) > u(t, x)$$

とくに $t \to u(t,x)$ は単調増加，かつ $u(t,x) > \varphi(x)$.
$h_\infty < \infty$ ならば，定理3.1 より $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ となり，上の関係に矛盾． よって $h_\infty = \infty$，かつ

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v^*(x) > \varphi(x),$$

ここで v^* は（**SP**) の単調非増加な正値解である（定理2.1 (ii) に注意).

定常問題の解析

定理**3.3** に現れる**2**つの定常問題

(SP) $$\begin{cases} dv'' + f(v) = 0, \quad v > 0 \quad \textbf{for} \quad x \geq 0, \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$(\mathrm{SP})_\ell$ $$\begin{cases} dv'' + f(v) = 0, \quad v > 0 \quad \textbf{for} \quad 0 < x < \ell, \\ v'(0) = v(\ell) = 0 \end{cases}$$

- 相平面の方法： $w = v'$ を導入

$$\begin{cases} dv'' + f(v) = 0, \\ v(0) = p > 0, \quad v'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v' = w, \\ dw' = -f(v), \\ v(0) = p > 0, \ w(0) = 0 \end{cases}$$

解を $v(x:p)$ (または $(v(x;p), w(x;p))$) とすると

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{2}w(x;p)^2 + F(v(x;p))\right\} = 0, \qquad F(v) = \int_0^v f(u)du$$

定常問題の解析

$$\frac{d}{2}w(x;p)^2 + F(v(x;p)) = F(p) \tag{3.1}$$

“time map” $X(p)$ を次のように定める：

$$X(p) = \inf\{x^* > 0;\ v(x^*;p) = 0\} \tag{3.2}$$

$X(p^*) = \ell$ を満たす $p^* > 0$ が求まれば，$v(x;p^*)$ は **(SP)**$_\ell$ の解となる.

(3.1) より

$$\sqrt{d/2}w = \sqrt{d/2}dv/dx = -\sqrt{F(p) - F(v)}.$$

したがって $X(p)$ は次の積分形で表わされる：

$$X(p) = \sqrt{\frac{d}{2}}\int_0^p \frac{dv}{\sqrt{F(p) - F(v)}} = \sqrt{\frac{d}{2}}\int_0^1 \frac{pd\sigma}{\sqrt{F(p) - F(\sigma p)}}$$

$X(p)$ の性質を調べることが次の課題である.

4. 応用 I——ロジスティック型反応項

次の自由境界問題を考える：

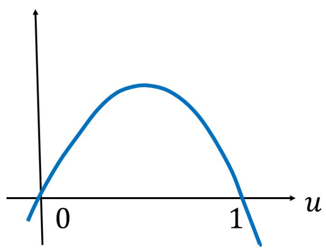
$$
\text{(FBP)} \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le h_0, \end{cases}
$$

- $f \in C^1$ の仮定–ロジスティック型

  $f(u) > 0$ for $u \in [0,1)$, $f(0) = f(1) = 0, f'(0) > 0$

  $f'(1) < 0, f(u) < 0$ for $u > 1$.

e.g. $f(u) = au(1-u)$, $a > 0$



定常問題の解構造—ロジスティック型

補題 4.1

$X(p)$ を**(3.2)**で定義する．このとき $X(p)$ は $p \in (0,1)$ の連続関数で次を満たす：

(i) $\displaystyle \lim_{p\to 0} X(p) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{f'(0)}}.$

(ii) $\displaystyle \lim_{p\to 1} X(p) = \infty.$

- **(SP)**$_\ell$ の解構造

補題 4.2

任意の $\ell > \pi/2\sqrt{d/f'(0)}$ に対して **(SP)**$_\ell$ の正値解 $\varphi(x;\ell)$ が存在し

$$\lim_{\ell\to\pi/2\sqrt{d/f'(0)}} \varphi(x;\ell) = 0 \quad \textbf{uniformly in} \quad [0,\pi/2\sqrt{d/f'(0)}].$$

定常問題の解構造 (II)—ロジスティック型

補題 4.3

(SP) を満たす解は $v^*(x) \equiv 1$ のみである.

- **spreading** 解の十分条件

$\ell > \pi/2\sqrt{d/f'(0)}$ に対する **(SP)**$_\ell$ の正値解を $\varphi(x;\ell)$.
$(u_\varphi, h_\varphi) = (\varphi(\cdot;\ell), \ell)$ を初期値とする **(FBP)** の解.

定理 **3.3** より

$$\lim_{t\to\infty} h_\varphi(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} u_\varphi(t,x) = 1 \quad [0,\infty) \text{ で広義一様収束}$$

すなわち (u_φ, h_φ) は **spreading** 解となる.

spreading-vanishing の二者択一性

定理 4.1 (Du-Lin '10)

(FBP) の解 (u, h) は次の **(i)** または **(ii)** のいずれかを満たす：

(i) 絶滅 **(vanishing):** $h_\infty \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{f'(0)}}$ および

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0.$$

さらに，$h_\infty < \pi/2\sqrt{d/f(0)}$ ならば，$\exists\beta > 0$ **s.t.**

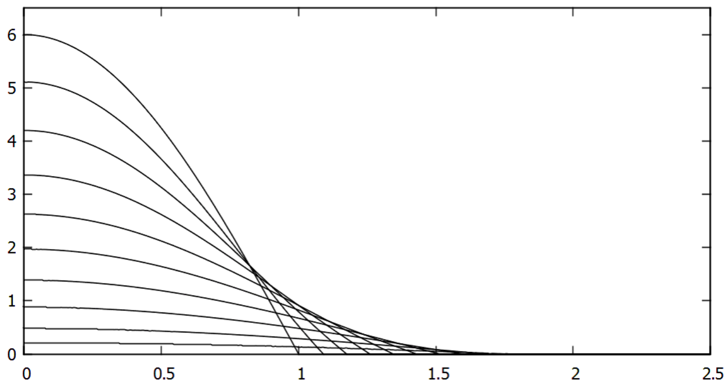
$$\|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = O(e^{-\beta t}), \quad t \to \infty.$$

(ii) 分布拡大 **(spreading):** $h_\infty = \infty$ および

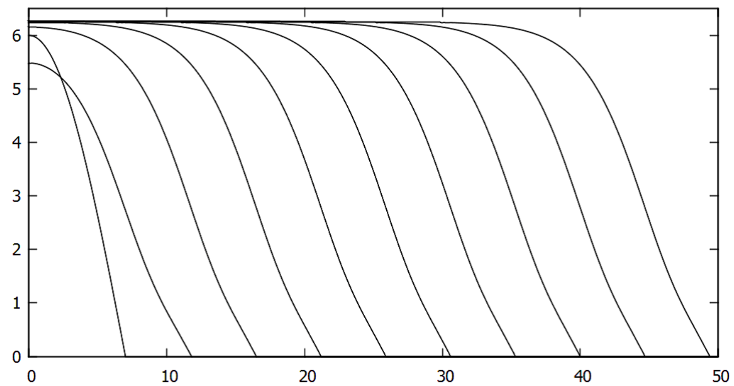
$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 1, \qquad [0,\infty) \quad \text{で広義一様収束.}$$

注意 $h_0 \geq \pi/2\sqrt{d/f'(0)}$ ならば **(FBP)** の解は常に **spreading.**

数値シミュレーション



Vanishing



Spreading

解 $\boldsymbol{u = u(x, t)}$ のグラフ **(縦軸: $\boldsymbol{u}$, 横軸： $\boldsymbol{x}$)**

● 定理4.1 の証明: (u,h) について $h(T) > \pi/2\sqrt{d/f'(0)}$ をみたす $T > 0$ が存在すれば(ii)を満たすことを示す.

$u(T,x) > 0$ in $(0,h(T))$ より, $\exists \ell \in (\pi/2\sqrt{d/f'(0)}, h(T))$ s.t.

$$\varphi(x;\ell) < u(T,x) \quad \text{in} \quad (0,\ell)$$

ここで $\varphi(x;\ell)$ は $(\mathrm{SP})_\ell$ の正値解. (φ,ℓ) を初期値とする(FBP)の解を (u_φ, h_φ) とする. 比較定理(定理2.2)より

$$u_\varphi(t,x) < u(t+T,x), \qquad h_\varphi(t) < h(t+T).$$

ここで $t \to \infty$ とすれば

$$1 = \lim_{t\to\infty} u_\varphi(t,x) \le \liminf_{t\to\infty} u(t+T,x) \le \limsup_{t\to\infty} u(t+T,x) \le 1$$

さらに

$$\infty = \lim_{t\to\infty} h_\varphi(t) \le \lim_{t\to\infty} h(t+T),$$

i.e. (u,h) は (ii) のspreading 解となる.

初期データに対する閾値（threshold）

(u_0, h_0) を固定，ただし，$h_0 < \pi/2\sqrt{d/f'(0)}$. σ をパラメータにとり，次の自由境界問題を考える：

$$(\mathrm{FBP})_\sigma \qquad \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = \sigma u_0(x), & 0 \le x \le h_0, \end{cases}$$

(u_σ, h_σ) を **(FBP)$_\sigma$** の解とすると，$\sigma \to (u_\sigma, h_\sigma)$ は単調増加.

定理 4.2

次の性質を持つ $\sigma^* \in (0, \infty]$ が存在する：

(i) $0 \le \sigma \le \sigma^*$ ならば，(u_σ, h_σ) は **vanishing** 解である，

(ii) $\sigma > \sigma^*$ ならば，(u_σ, h_σ) は **spreading** 解である，

Dirichlet 境界条件（固定境界)–(FBP)$_D$

$$(\mathrm{FBP})_D \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le h_0, \end{cases}$$

- $h_0 > 0, u_0 \in C^2[0,h_0], u_0(0) = u_0(h_0) = 0,\ \ u_0 \ge 0$ in $[0,h_0]$.
- f: 局所 Lipschitz 連続な関数で，$f(0) = f(1) = 0$ かつ：

$$f(u) < 0 \quad \text{for} \quad u > 1.$$

テーマ

- Neumann 境界条件のケースと同様の結果が成り立つか？
- Neumann 境界条件との相違はどこに現れるか？

$(\textbf{FBP})_D$ に対する基本的結果 (I)

- 時間大域解の存在（定理 2.1((ii) を除く）と同様の結果）
- 比較定理（定理 2.2 と類似の結果）
- エネルギー等式（定理 2.3 と同様の結果）
- **vanishing** 解と **spreading** 解; **vanishing** 解の定義は同様.

  $(u.h)$ を $(\textbf{FBP})_D$ の解とする:

分布の拡大 (spreading)（ 侵入の成功)

$h_\infty := \infty$ かつ $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v^*$ $[0,\infty)$ で広義一様収束.

v^* は次の定常問題の解である：

$$(\mathrm{SP})_D \begin{cases} dv'' + f(v) = 0, \quad v > 0 \quad \textbf{for} \quad x > 0, \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$(\mathbf{FBP})_D$ に対する基本的結果 (II)

- **vanishing** 解の条件（定理 **3.1** と同様，定理 **3.2** と類似の結果）
- **spreading** 解の条件（定理 **3.3** と類似の結果）**:(SP)**$_\ell$ を次で置き換え

$$(\mathrm{SP})_{D,\ell} \qquad \begin{cases} d\varphi'' + f(\varphi) = 0, \quad \varphi > 0 \quad \textbf{for} \quad 0 < x < \ell, \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

f ロジスティック型の場合

- **(SP)**$_{D,\ell}$ の解構造：任意の $\ell > \pi\sqrt{d/f'(0)}$ に対し解 $\varphi(x;\ell)$ が存在し

$$\lim_{\ell \to \pi\sqrt{d/f'(0)}} \varphi(x;\ell) = 0 \quad \textbf{uniformly in} \quad [0, \pi\sqrt{d/f'(0)}].$$

- **(SP)**$_D$ の解構造：唯一の解 $v_L(x)$ が存在する.

ロジスティック型 f に対する　spreading-vanishing 二者択一性

定理 4.3 (Kaneko-Yamada '11)

(FBP)$_D$ の解 (u,h) は次の **(i)** または **(ii)** のいずれかを満たす：

(i) Vanishing: $h_\infty \le \pi\sqrt{d/f'(0)}$ および

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0.$$

さらに，$h_\infty < \pi\sqrt{d/f(0)}$ ならば，$\exists\beta > 0$ **s.t.**

$$\|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = O(e^{-\beta t}), \quad t \to \infty.$$

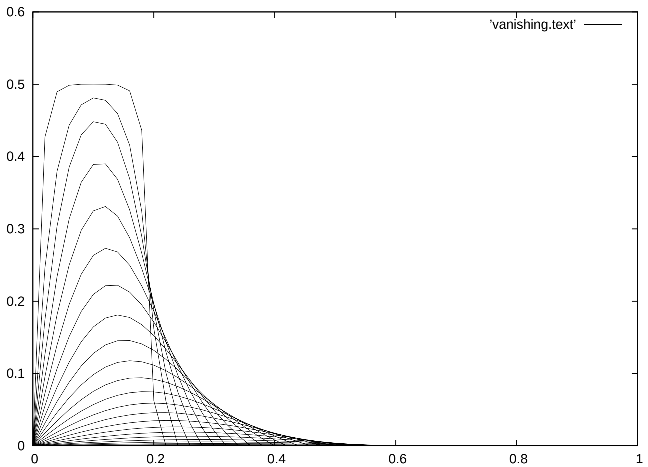
(ii) Spreading: $h_\infty = \infty$ および

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v_L(x), \qquad [0,\infty) \text{ で広義一様収束},$$

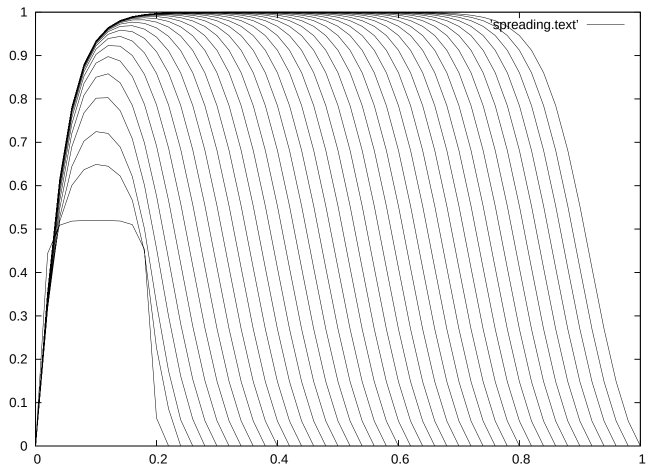
ここで v_L は **(SP)**$_D$ 一意正値解である.

数値シミュレーション

Dirichlet 境界条件 $(x = 0)$ の下でロジスティック型自由境界問題



Vanishing（絶滅）



Spreading（分布拡大）

5. 応用 II——双安定型反応項

双安定型の反応項を伴う拡散方程式に対する自由境界問題を考える：

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & 0 < x < h(t), t > 0, \\ u_x(t,0) = u(h(t),t) = 0, & t > 0, \\ \dot{h}(t) = -\mu u_x(h(t),t), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & 0 \leq x \leq h_0, \end{cases}$$

- $f \in C^1$ に対する仮定——双安定型

$f(0) = f(\theta) = f(1) = 0,\ f'(0) < 0, f'(\theta) > 0, f'(1) < 0,$

$f(u) < 0$ for $u \in (0,\theta) \cup (1,\infty)$

$f(u) > 0$ for $u \in (\theta,1)$ および $\displaystyle\int_0^1 f(u)du > 0.$

e.g. $\qquad f(u) = au(u-\theta)(1-u) \quad 0 < \theta < 1/2.$

定常問題の解構造——双安定型

補題 5.1

$X(p)$ を **(3.2)** で定義し，$\hat{u} \in (\theta, 1)$ は $F(\hat{u}) = 0$ となる数とする．このとき $X(p)$ は $p \in (\hat{u}, 1)$ の連続関数で次を満たす

(i) $\displaystyle \lim_{p \to \hat{u}} X(p) = \lim_{p \to 1} X(p) = \infty.$

(ii) $\displaystyle \min_{p \in (\hat{u}, 1)} X(p) = \ell^* > 0.$

- **(SP)**$_\ell$ の解構造

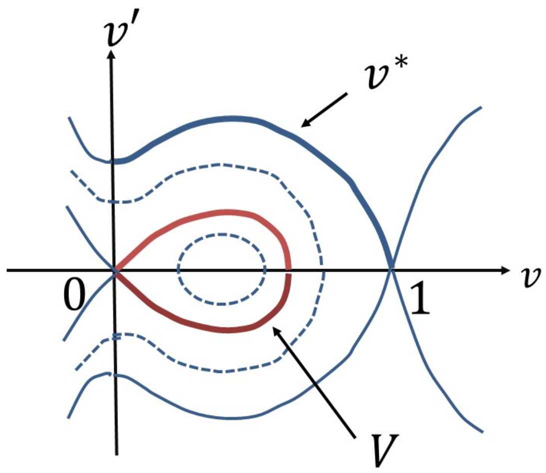
補題 5.2

任意の $\ell > \ell^*$ に対して **(SP)**$_\ell$ は **2** つの正値解 $\varphi_1(x;\ell), \varphi_2(x;\ell)$ $(\varphi_1(x) > \varphi_2(x))$ を持つ．

双安定な f に対する相平面解析

$$(\mathrm{SP})\begin{cases} dv'' + f(v) = 0, & v(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad x > 0, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

- 相平面の方法により，**(SP)** は正値単調減少な解 φ^* を唯一つ持つことがわかる



By phase plane analysis, φ^* corresponds to an orbit connecting $(v, v') = (1, 0)$ to a point on v'-axis.

定常問題の解構造—双安定型

(FBP) の解 (u, h) のうち $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ を満たす解について考える.

補題 5.3 (Du-Lou '15)

$h_\infty = \infty$ とする. ω 極限集合を

$$\omega(u_0, h_0) = \{v^*;\ \exists\{t_n\} \quad \text{s.t.} \quad u(t_n, \cdot) \to v^* \quad \text{in} \quad C_{loc}[0, \infty)\}$$

で定義するとき, $\omega(u_0, h_0) = \{$ 定数関数 $\}$, または $\omega(u_0, h_0) = \{v^*;\ v^*$ は **(SP)** を満たす正値単調減少関数 $\}$ である.

注意 **(SP)** は 2 つの定数解 $v^*(x) \equiv \theta, 1$ の他に唯一の正値単調減少解 φ^* をもつ.

双安定型に対する三者択一性

定理 5.1 (Du-Lou '15)

(FBP) の解 (u,h) は次の **(i)**, **(ii)** または **(iii)** を満たす:

(i) 絶滅 **(vanishing)**: $h_\infty < \infty$ および $\exists c_1 \in (0,\theta)$ **s.t.**

$$\|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = O(e^{-c_1 t}), \quad t \to \infty.$$

(ii) 分布拡大 **(spreading)**: $h_\infty = \infty$ および

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 1 \quad [0,\infty) \text{ で広義一様収束.}$$

(iii) transition: $h_\infty = \infty$ および

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \varphi^* \quad [0,\infty) \text{ で広義一様収束. ここで } \varphi^* \text{ は}$$

(SP) の唯一の正値単調減少解である.

• 定理 5.1 の証明: $h_\infty < \infty$ のケースは **vanishing** 解となるから, $h_\infty = \infty$ のケースを考える. 補題 5.2 より $\omega(u_0, h_0) = \{\theta\}, \{1\}, \{\varphi^*\}$. したがって背理法により $\omega(u_0, h_0) = \{\theta\}$ の可能性を排除する.

v_{os} を $dv'' + f(v) = 0$ を満たす正値周期関数とする.

$$w = u - v_{os}$$

とおくと w は次の方程式を満たす：

$$w_t = dw_{xx} + c(t,x)w,$$

ただし $c(t,x) = \int_0^1 f'(\sigma u(t,x) + (1-\sigma)v_{os}(x))d\sigma$.

Angenent の結果より $w(t,x) = 0$ をみたす x の個数は $t \to \infty$ とともに増加しない. しかし $u(t,x) \to \theta$ と仮定すると, w の零点の個数は無限に増加することになり矛盾.

初期値に対する threshold

　初期値を $(u_0, h_0) \to (\sigma u_0, h_0)$ と置き換えた問題**(FBP)**$_\sigma$ を考える. 対応する解を $(u_\sigma(t,x), h_\sigma(t))$ とする.

$$\sigma^* = \inf\{\sigma > 0;\ (u_\sigma, h_\sigma) \text{ が spreading 解}\}$$
$$\sigma_* = \sup\{\sigma > 0;\ (u_\sigma, h_\sigma) \text{ が vanishing 解}\}$$

定理 5.2

$\sigma^* = \sigma_*$ となり，次の **(i)〜(iii)** が成り立つ：

(i) $0 < \sigma < \sigma^*$ ならば，(u_σ, h_σ) は **vanishing** 解.

(ii) $\sigma = \sigma^*$ ならば，(u_σ, h_σ) は **transition** 解, **i.e.,** $h_\infty = \infty$ かつ

$$\lim_{t\to\infty} u_\sigma(t,\cdot) = \varphi^* \text{ (広義一様収束)}$$

(iii) $\sigma > \sigma^*$ ならば，(u_σ, h_σ) は **spreading** 解.

6. 応用 III—正値双安定型反応項

次のような反応項 f を考える：

$$f(u) = u(a - bu) - \frac{u^2}{1+u^2}, \quad a, b : \text{正定数}$$

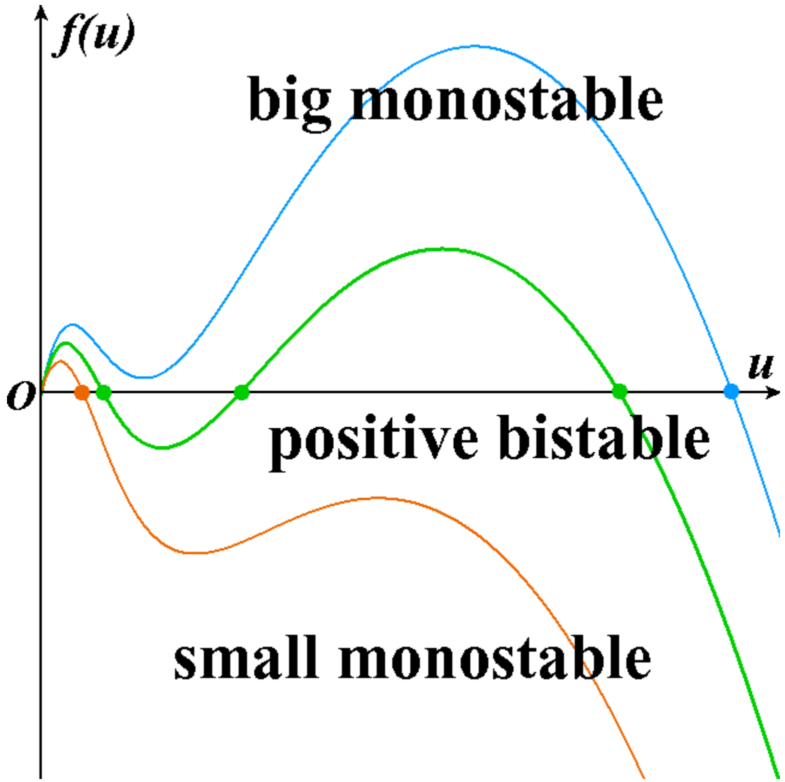
“ロジスティック項” ＋ “Holling III 型”

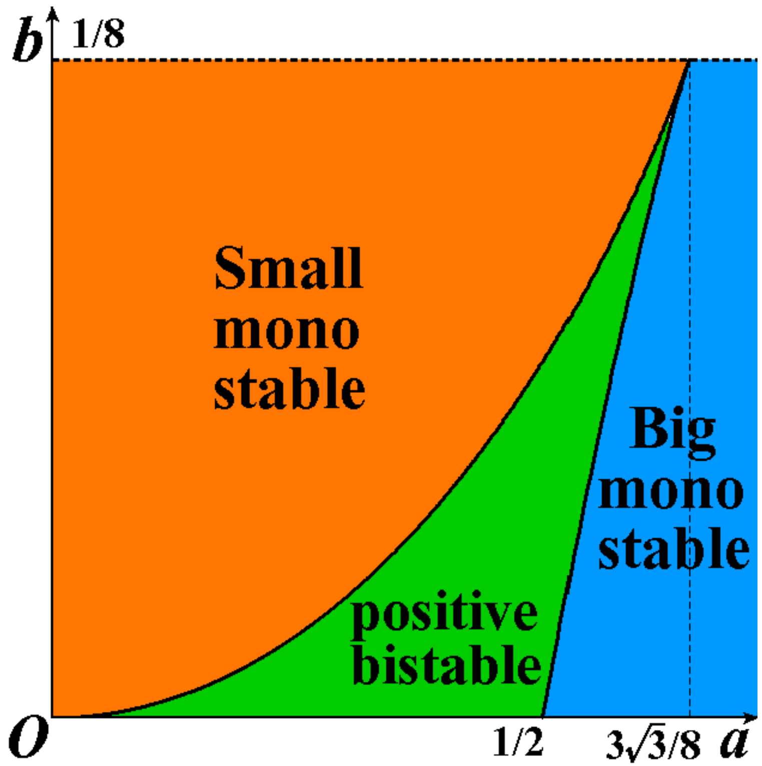
代表的生態学モデル: **Spruce budworm** (トウヒハマキガ）モデル

The spruce budworm is one of the most destructive native insects in the northern spruce and fir forests of the Eastern US and Canada.

(U.S. Department of Agriculture, Forest Service より)

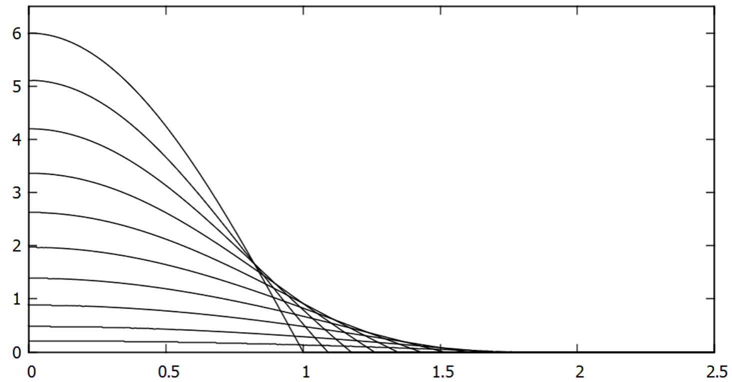
$f(u) = u(a - bu) - u^2/(1 + u^2)$ のクラス分け



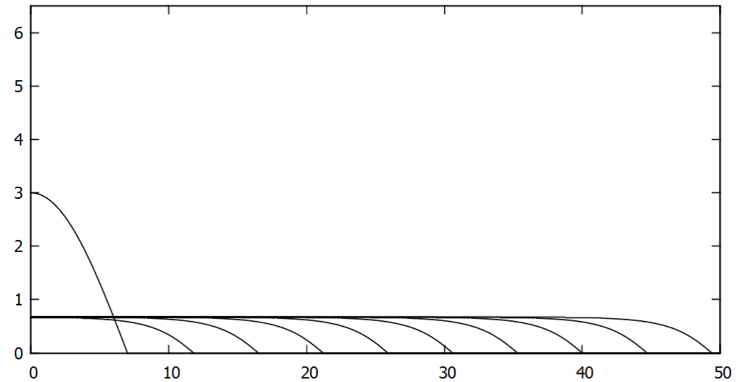


正値双安定型（positive bistable）

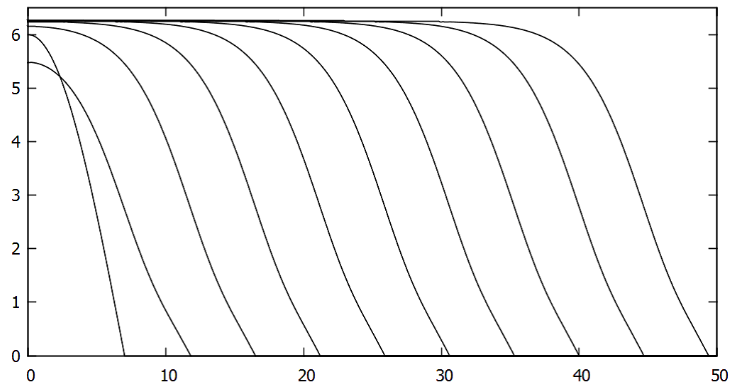
正値双安定型 f に関する数値シミュレーション



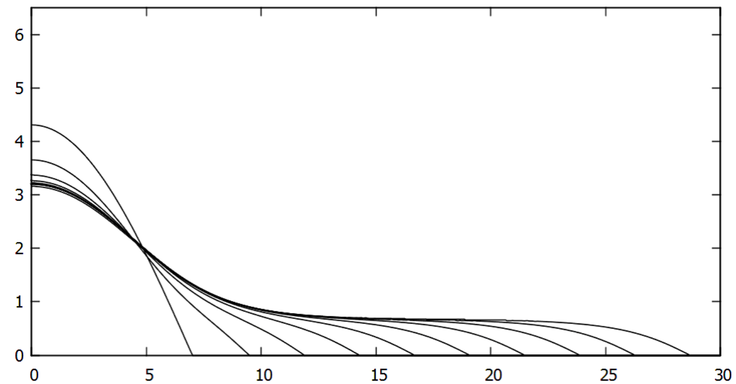
Vanishing



Small spreading



Big spreading



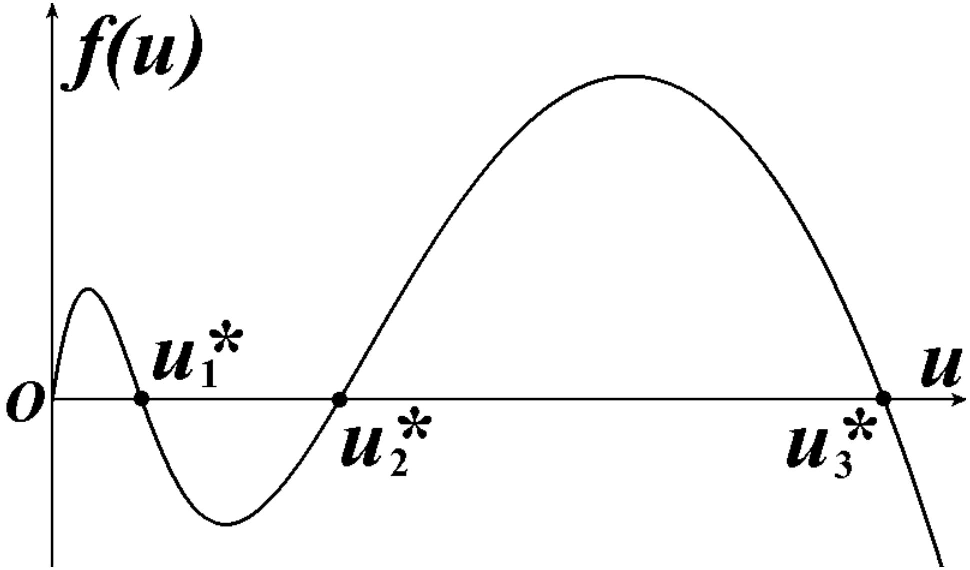
Transition

解 $u = u(x, t)$ のグラフ (縦軸: u, 横軸： x) : **Y. Kawai '15**

正値双安定型 $f(u)$

- 正値双安定 f ： $f \in C^1$ は４つの零点 $0, u_1, u_2, u_3$ (ただし $0 < u_1 < u_2 < u_3$) を持ち，

$$f'(0) > 0, f'(u_1) < 0, f'(u_2) > 0, f'(u_3) < 0, \quad \int_{u_1}^{u_3} f(u)du > 0.$$



注意 ODE $u_t = f(u)$ の平衡点として，$u = u_1, u_3$ は漸近安定，かつ $0, u_2$ は不安定である．

正値双安定な f に対する課題

- 正値双安定 f:　$f \in C^1$ は4つの零点 $0, u_1, u_2, u_3$ (ただし $0 < u_1 < u_2 < u_3$) を持ち,

$$f'(0) > 0, f'(u_1) < 0, f'(u_2) > 0, f'(u_3) < 0, \quad \int_{u_1}^{u_3} f(u)du > 0.$$

数値シミュレーション：　small spreading, big spreading などの様々な現象を提供

研究テーマ

- 数値シミュレーションのように様々な spreading 現象が起こるか？
- 解の漸近挙動を分類することは可能か？
- 自由境界 $h = h(t)$ に対する $t \to \infty$ での展開速度を導け

定理 6.1.(Kawai-Y. '16)

(FBP) の解 (u,h) は次の性質 **(i)-(iv)** のうちいずれか一つを満たす：

(i) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(t) \leq (\pi/2)\sqrt{d/f'(0)}$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{C[0,h(t)]} = 0.$

(Vanishing)

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_1$ （$[0,\infty)$ で広義一様収束） **(Small spreading)**

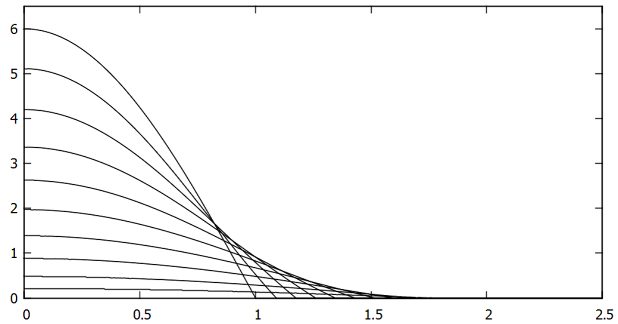
(iii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_3$ （$[0,\infty)$ で広義一様収束） **(Big spreading)**

(iv) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v^*(x)$ （$[0,\infty)$ で広義一様収束）．ただし v^* は

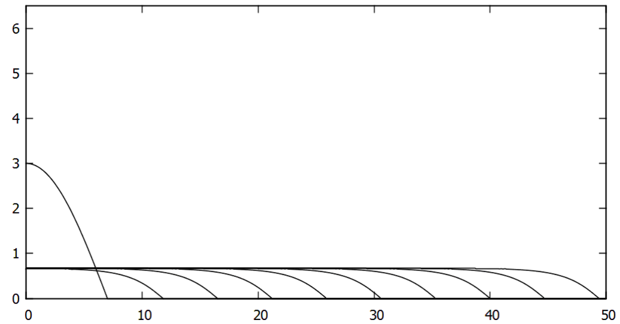
$$\text{(SP)} \qquad dv'' + f(v) = 0 \quad \text{かつ} \quad v'(0) = 0$$

をみたす単調減少な正値関数であり，一意的に定まる． **(Transition)**

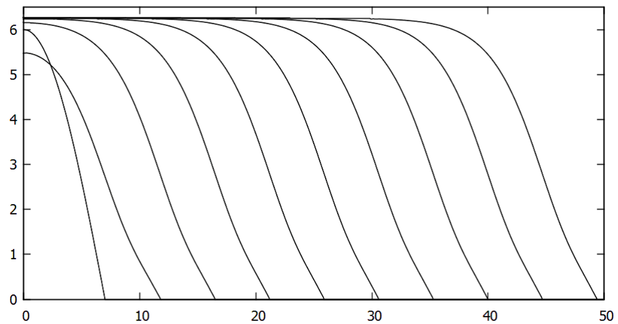
Vanishing, spreading and transition



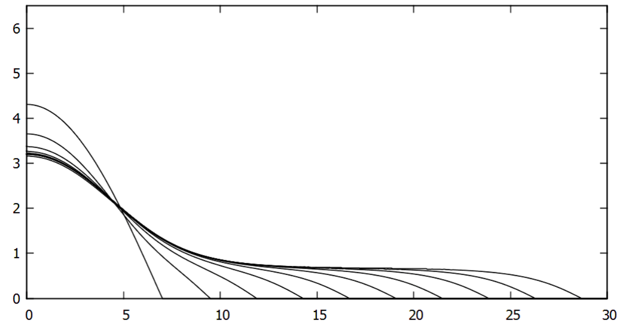
Vanishing



Small spreading



Big spreading



Transition

(FBP) の解について4タイプの漸近挙動

正値双安定 f への threshold numbers

初期値 (u_0, h_0) を固定，パラメータ σ を導入:

$$(\mathrm{FBP})_\sigma \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, \quad u(0,x) = \sigma u_0(x), & 0 < x < h_0. \end{cases}$$

次の $\sigma_i^*, i = 1, 2$ を定義：

$$\sigma_1^* := \sup\{\hat{\sigma} : \text{ 各 } \sigma < \hat{\sigma} \text{ に対し解は vanishing}\},$$
$$\sigma_2^* := \inf\{\hat{\sigma} : \text{ 各 } \sigma > \hat{\sigma} \text{ に対し解は big spreading}\}.$$

比較定理より

$$0 \leq \sigma_1^* < \sigma_2^* \leq \infty.$$

Sharp threshold

定理 6.2

初期値 $(u(0,\cdot), h(0)) = (\sigma u_0, h_0)$ に対する **(FBP)**$_\sigma$ の解を (u_σ, h_σ) とする.

(i) $0 \le \sigma \le \sigma_1^*$ ならば, (u_σ, h_σ) は **vanishing**
(ii) $\sigma_1^* < \sigma < \sigma_2^*$ ならば, (u_σ, h_σ) について **small spreading** が成立.

(iii) $\sigma = \sigma_2^*$ ならば, (u_σ, h_σ) について **transition** が成立.

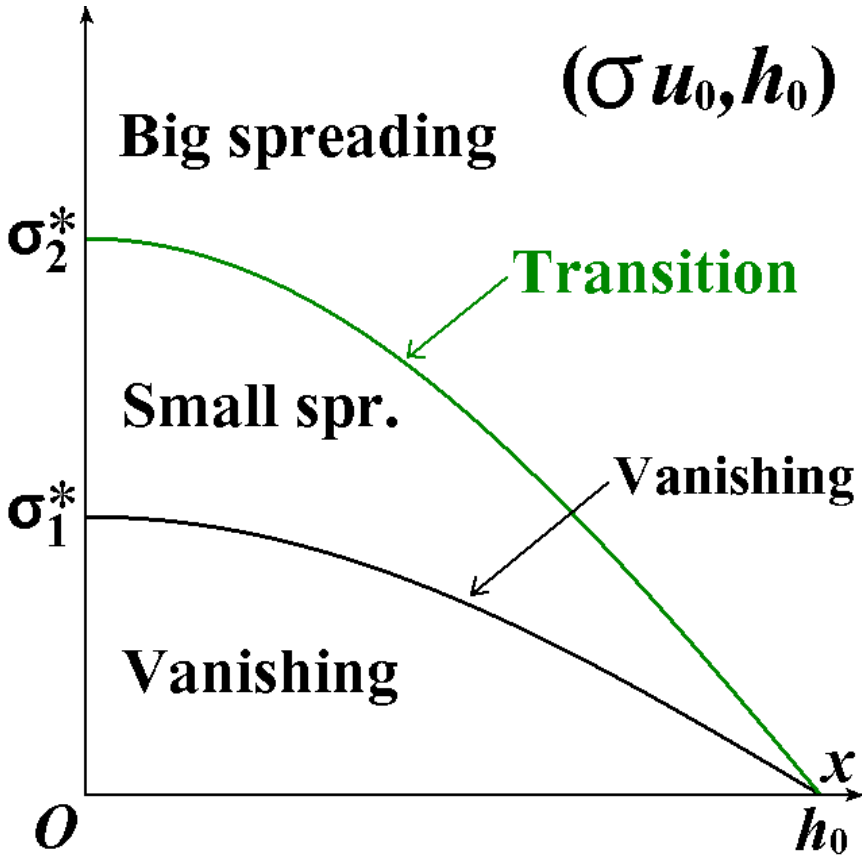
(iv) $\sigma > \sigma_2^*$ ならば, (u_σ, h_σ) について **big spreading** が成立.

注意

$h_0 < (\pi/2)\sqrt{d/f(0)}$ ならば $\sigma_1^* > 0$; 一方, $h_0 > (\pi/2)\sqrt{d/f(0)}$ ならば, $\sigma_1^* = 0$.

さらに h_0 が大きければ, $\sigma_2^* < \infty$.

Threshold for vanishing and spreading

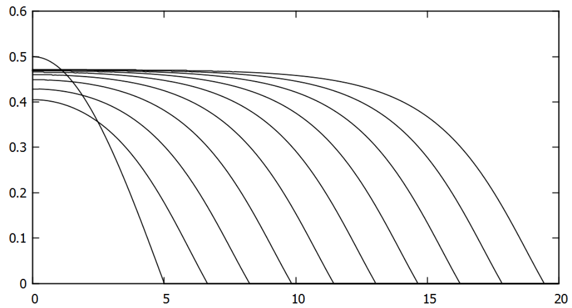


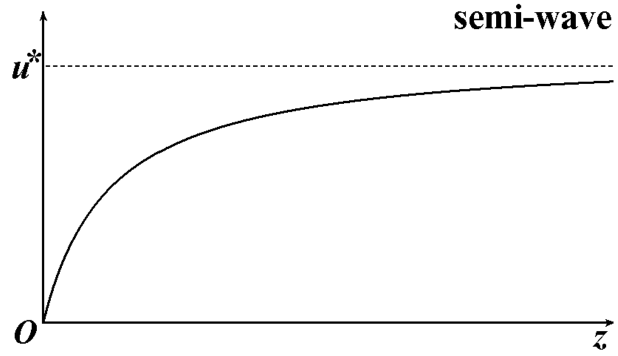
7. 自由境界の展開速度と解の漸近的形状

数値シミュレーションより，**(FBP)** の解 (u,h) が **spreading** となる場合

$$h'(t) \approx c \qquad u(t,x) \approx q(h(t)-x) \qquad \text{as} \quad t \to \infty$$

の形で $(u(t,x),h(t))$ が推移すると予想される．





問題 1

- **spreading** 解 (u,h) について

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = c$$

となる正定数 c を求めよ．

Semi-wave

(FBP) の解 (u, h) が次のように表されると仮定：

$$(u(t,x), h(t)) = (q(z), h(t)), \quad z = h(t) - x, \quad h'(t) = c.$$

このとき $(u(t,x), h(t)) = (q(h(t)-x), h(t))$ は以下の関係式を満たす:

$$\begin{aligned}
u_t = du_{xx} + f(u) \quad &\Longrightarrow \quad dq'' - cq' + f(q) = 0, \quad z > 0,\\
u(t, h(t)) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad q(0) = 0,\\
h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)) \quad &\Longrightarrow \quad c = \mu q'(0),\\
\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \alpha^* \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{z\to\infty} q(z) = \alpha^*.
\end{aligned}$$

Semi-wave 問題 (Du - Lou '15)

次の関係式を満たす (q, c) を求めよ：

$$(\mathrm{SWP}) \begin{cases} dq'' - cq' + f(q) = 0, \quad q(z) > 0, \quad \text{for} \quad z > 0, \\ q(0) = 0, \ \ \mu q'(0) = c, \quad \lim_{z\to\infty} q(z) = \alpha^*. \end{cases}$$

Semi-wave 問題

Semi-wave 問題

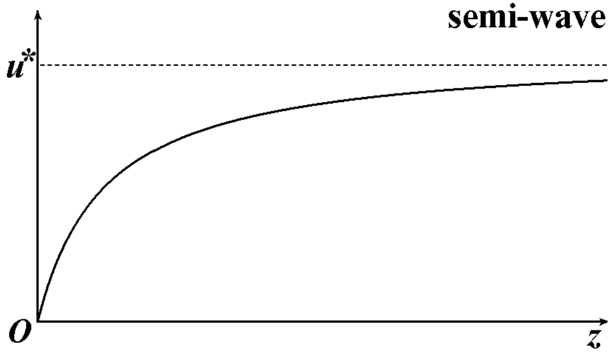
次の関係式を満たす (q, c) を求めよ：

$$(\mathrm{SWP})\begin{cases} dq'' - cq' + f(q) = 0, \quad q(z) > 0, \quad \textsf{for} \quad z > 0, \\ q(0) = 0,\ \ \mu q'(0) = c, \quad \lim_{z\to\infty} q(z) = \alpha^*. \end{cases}$$

ここで α^* は f の正値零点.

(q, c): **(SWP)** の解 $\quad\Rightarrow\quad$ q: 速度 c の **semi-wave**

c: $h(t)$ の展開速度を与えると予想

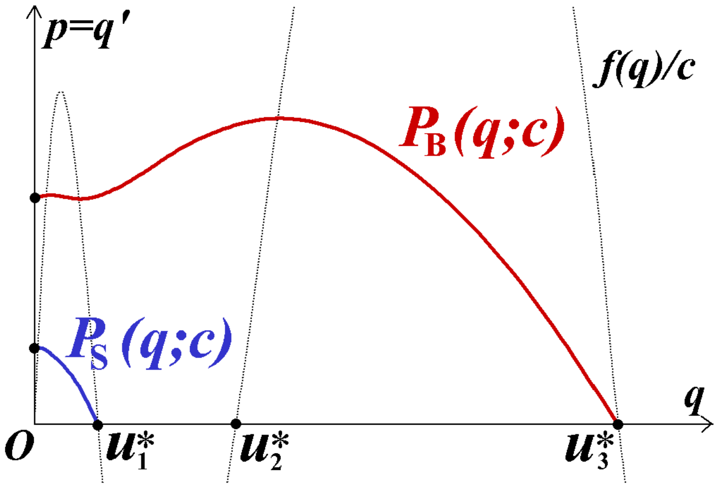


相平面の方法による semi-wave 問題の解析

Du-Lou ('15) のアイデアにより $p = q'$ とおく：

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = \dfrac{1}{d}(cp - f(q)). \end{cases}$$

qp 平面において $(q,p) = (\alpha^*, 0)$ と $(q,p) = (0, c/\mu)$ を結ぶ解軌道を求めることに帰着される.



Semi-wave 問題の解

$\boldsymbol{f(u)}$**: ロジスティック型**

$$f(u) > 0 \text{ for } u \in [0,1),\ f(0) = f(1) = 0, f'(0) > 0$$
$$f'(1) < 0, f(u) < 0 \text{ for } u > 1.$$

$\boldsymbol{f(u)}$**: 双安定型**

$$f(0) = f(\theta) = f(1) = 0,\ f'(0) < 0, f'(\theta) > 0, f'(1) < 0,$$
$$f(u) < 0 \text{ for } u \in (0,\theta) \cup (1,\infty)$$
$$f(u) > 0 \text{ for } u \in (\theta,1) \text{ および } \int_0^1 f(u)du > 0.$$

定理 7.1

f はロジスティック型，または双安定型とする．このとき任意の $\mu > 0$ に対して **(SWP)** は一意解 $(q^*(z), c^*)$ を持つ．

- 定理7.1の証明アイデア:

(SWP) $$\begin{cases} dq'' - cq' + f(q) = 0, \quad q(z) > 0, \qquad z > 0, \\ q(0) = 0,\ \mu q'(0) = c,\ q(\infty) = \alpha^*. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

補助問題： 各 $c \geq 0$ に対して

(7.1) $$\begin{cases} dq'' - cq' + f(q) = 0, \quad q(z) > 0, \\ q(0) = 0,\ q(\infty) = \alpha^*. \end{cases}$$

を解く. 解 $q = q(z; c)$ とする.

$$\Downarrow$$

$\mu q'(0; c) = c$ をみたす $c = c^*$ を求める.

$$\Downarrow$$

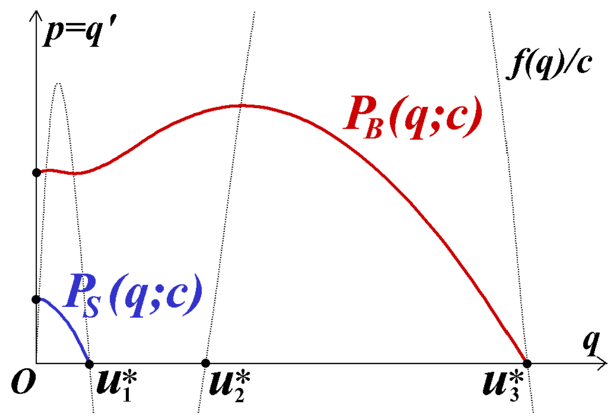
$(q, c) = (q(z; c^*), c^*)$ が (SWP) の解

新しい関数 $p = q'$ を導入し **(7.1)** を次の問題に書き換え：

$$\begin{cases} q' = p, \\ dp' = cp - f(q), \\ q(0) = 0,\ \ q(\infty) = \alpha^*. \end{cases} \tag{7.2}$$

(7.2) の解 $(q, p) = (q(z; c), p(z; c))$ について $p = P(q; c)$ と考える：

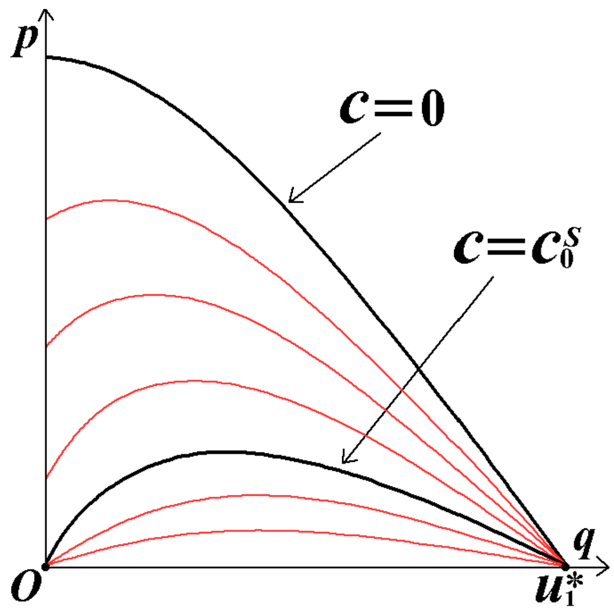
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dq} = \dfrac{1}{d}\left(c - \dfrac{f(q)}{P}\right), \\ P(0; c) = \omega, \quad P(\alpha^*; c) = 0. \end{cases}$$



(7.2) の解**:** $p = P(q;c)$

$c \mapsto P(q;c)$**:** 狭義単調減少関数

$P(0;c)$ は $c \geq 0$ について単調減少な連続関数.



$q'(0;c) = p(0;c) = P(0;c) = c/\mu$ を満たす c が唯一つ定まる.

自由境界 $h(t)$ の展開速度

定理 7.2 (Du-Lou '15)

f はロジスティック型または双安定型とする. (u,h) が **(FBP)** の **spreading** 解ならば

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=c^*$$

が成り立つ. ここで (q^*,c^*) は **(SWP)** の解である.

- 証明のアイデア： $\forall c<c^*$ に対し次の初期値問題の解を $q_c(z)$ とする：

$$\begin{cases} dq''-cq'+f(q)=0, \\ q(0)=0,\ \ \mu q'(0)=c^* \end{cases}$$

このとき

$$k(t)=ct+z_c,\qquad w(t,x)=q_c(k(t)-x)$$

は **subsolution** となる. $\quad\Rightarrow\quad \displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}\ge c^*.$

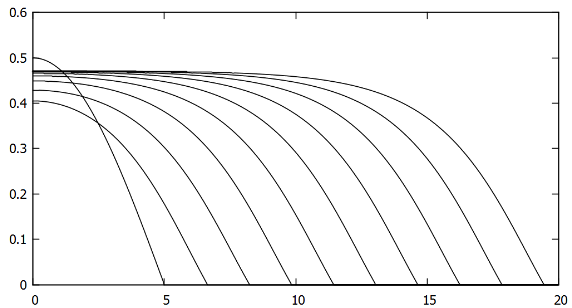
逆の関係も比較関数を構成して証明する.

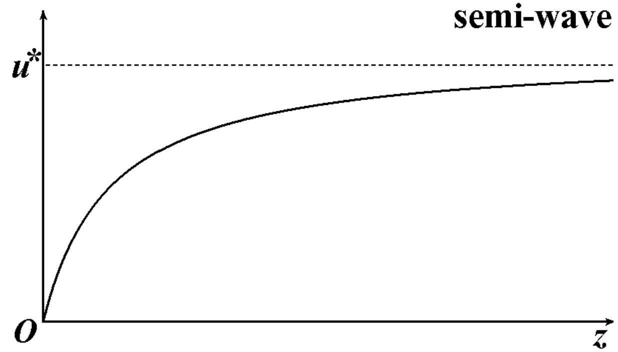
解 $u(t,x)$ の漸近的形状

数値シミュレーションと定理7.2より，spreading 解 (u,h) は

$$u(t,x) \approx q^*(h(t)-x) \qquad \text{with} \quad \frac{h(t)}{t} \approx c^* \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

の形が予想される．ただし (q^*,c^*) は(SWP)の解.





問題 2

- spreading 解 (u,h) について (SWP) の解 (q^*,c^*) を用いて

$$u(t,x) \approx q^*(h(t)-x), \quad h'(t) \approx c^* \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

となることを示せ.

漸近的形状の評価

(SWP) の解 $(q^*(z), c^*)$ $\Rightarrow$ 自由境界の近傍における $u(t,x)$ の形状に関する情報

定理 7.3 (Du-Matsuzawa-Zhou '14)

f はロジスティック型または双安定型とする. (u,h) が **(FBP)** の **spreading** 解とする. このとき定数 H が存在して

$$\lim_{t\to\infty}(h(t) - c^*t - H) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} h'(t) = c^*$$

かつ

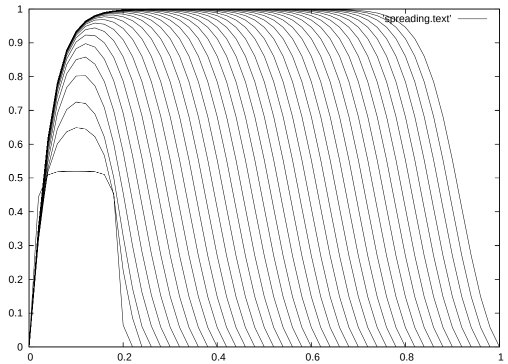
$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,h(t)]} |u(t,x) - q^*(h(t)-x)| = 0.$$

ここで $(q^*(z), c^*)$ は **(SWP)** の一意的な解である.

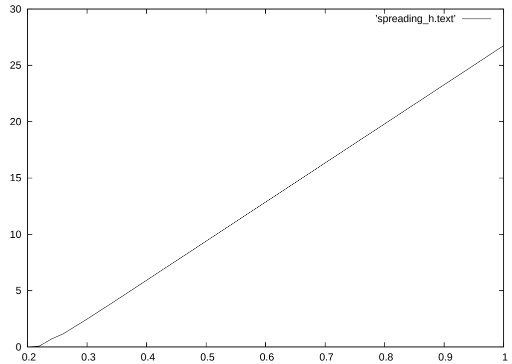
Dirichlet 境界条件の下での自由境界の展開速度

f: ロジスティック型

(u,h): **(FBP)**$_D$ の **spreading** 解の数値シミュレーション



Spreading 解の形状



自由境界の挙動

問題 3

- **(FBP)**$_D$ の **spreading** 解 (u,h) について **(SWP)** の解 (q^*,c^*) を用いて詳しい漸近的評価を導け.

$h(t)$ の展開速度と $u(t,x)$ の形状

定理 7.4

f はロジスティック型または双安定型とする．(u,h) が **(FBP)**$_D$ の **spreading** 解ならば

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=c^*$$

が成り立つ．ここで (q^*,c^*) は **(SWP)** の解である．

- $u(t,x)$ の漸近的形状: (u,h) を（**FBP**)$_D$ の **spreading** 解とする．

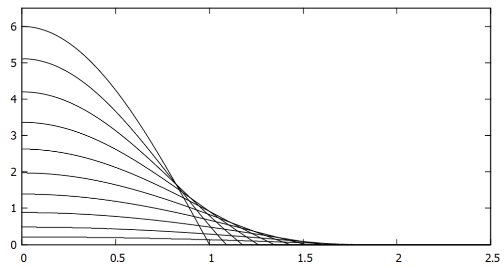
$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=v^*(x)\quad [0,\infty)\quad \text{で広義一様収束}$$

ただし，v^* は **(SP)**$_D$ の唯一の正値解である．一方，自由境界の近傍では $c<c^*$ のとき

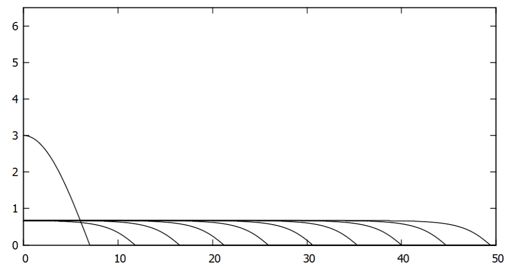
$$\lim_{t\to\infty}(h(t)-c^*t-H^*)=0,\qquad \lim_{t\to\infty}\sup_{ct\le x\le h(t)}|u(t,x)-q^*(h(t)-x)|=0$$

を示すことができる，

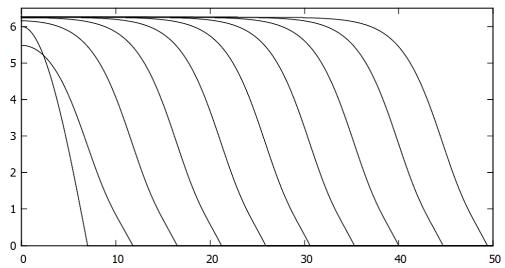
8. 解の漸近的評価──正値双安定な反応項



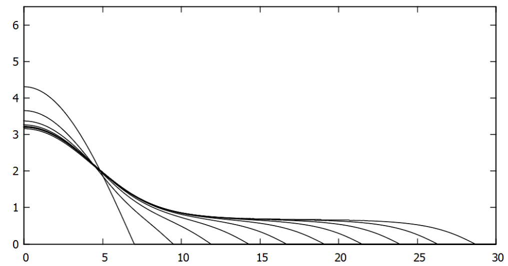
Vanishing



Small spreading



Big spreading



Transition

- **(FBP)** の解 (u, h) の詳しい漸近的評価を求めよ.

正値双安定な f に対する semi-wave 問題

- 正値双安定 f:

$f \in C^1$ は 4 つの零点 $0, u_1, u_2, u_3$ (ただし $0 < u_1 < u_2 < u_3$) を持ち,

$$f'(0) > 0, f'(u_1) < 0, f'(u_2) > 0, f'(u_3) < 0, \quad \int_{u_1}^{u_3} f(u)du > 0.$$

Semi-wave 問題

次の関係式を満たす (q, c) を求めよ：

$$(\mathrm{SWP}) \begin{cases} dq'' - cq' + f(q) = 0, \quad q(z) > 0, \quad \text{for} \quad z > 0, \\ q(0) = 0, \ \mu q'(0) = c, \quad \lim_{z\to\infty} q(z) = \alpha^*. \end{cases}$$

ここで $\alpha^* = u_1$ または $\alpha^* = u_3$.

Semi-wave 解の存在

$$f(u_1) = f(u_3) = 0, \quad u_1\text{: small spreading,} \quad u_3\text{: big spreading}$$

定理 8.1 (Kawai-Y. '16)

(i) $u^* = u_1$ のとき各 $\mu > 0$ に対して **(SWP)** は一意解 (q_S, c_S) を持つ.

(ii) $u^* = u_3$ のとき次のいずれかが成立する：

(Case A) 各 $\mu > 0$ に対して **(SWP)** は一意解 (q_B, c_B) を持つ.

(Case B) 正定数 μ^* が存在し，各 $0 < \mu < \mu^*$ に対して **(SWP)** は一意解 (q_B, c_B) を持ち，一方 $\mu > \mu^*$ にたいして **(SWP)** は解を持たない.

(iii) **(SWP)** が解 (q_B, c_B) を持てば，$c_B > c_S$ かつ $q_B(z) > q_S(z)$ ($z > 0$) が成り立つ.

$h(t)$ の展開速度

定理 8.2 (Kawai-Y. '16)

(u, h) を **(FBP)** の解とする．

(i) (u, h) について **small spreading** または **transition** を伴うとする．このとき

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = c_S.$$

(ii) (u, h) について **big spreading** を伴うとする．このとき **(SWP)** が解 (q_B, c_B) を持つならば

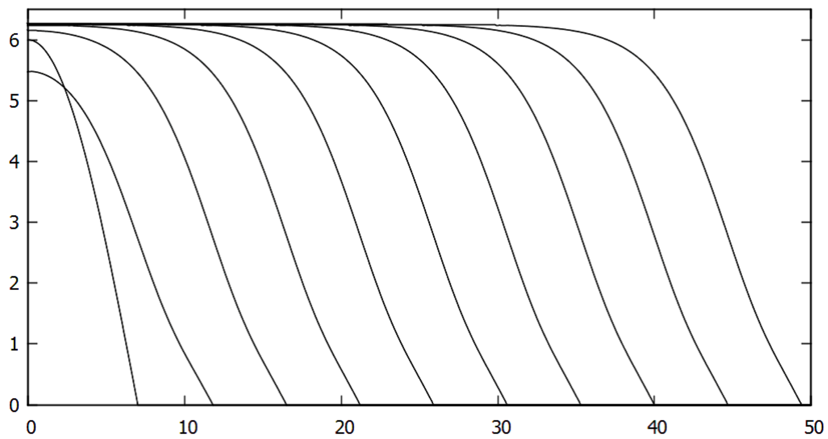
$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = c_B.$$

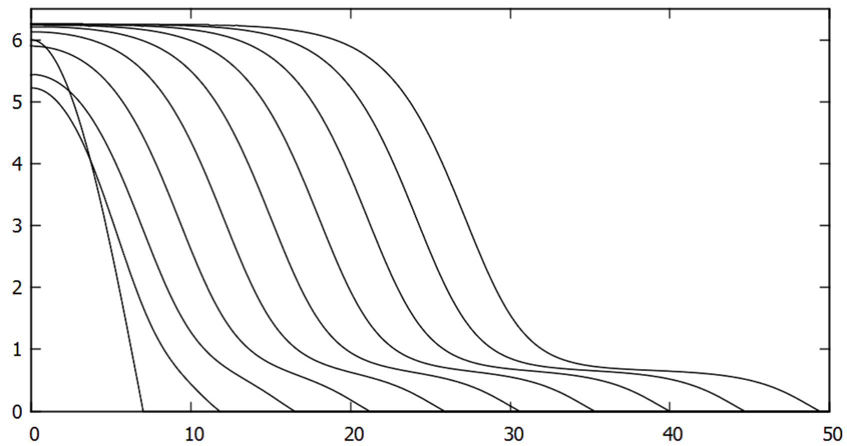
一方 $u^* = u_3$ に対して **(SWP)** が解を持たないならば

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = c_S.$$

Asymptotic speed of big spreading

$u^* = u_3$ に対する **(SWP)** の解の有無と $u(t,x)$ の形状の相違.





$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t} = c_B$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t} = c_S \text{ for large } \mu$$

解の漸近的形状

定理 8.3

(FBP) の解 (u, h) は **small spreading** を伴い，(q_S, c_S) を対応する **(SWP)** の解とする．このとき定数 H_S が存在して

$$\lim_{t\to\infty}(h(t) - c_S t - H_S) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} h'(t) = c_s$$

かつ

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,h(t)]} |u(t,x) - q_S(h(t) - x)| = 0.$$

big spreading 解 (u, h) について **(SWP)** が対応する解 (q_B, c_B) を持てば，同様な結果が成立する．

関連する問題

1次元空間の方程式

- **Robin** 境界条件（固定境界）

  Liu-Lou (Math. Model Nat. Phenom. 8(2013), JDE 259(2015)),,,..

- 両側自由境界, $I_t = [g(t), h(t)]$

$$g'(t) = -\mu u_x(t, g(t)), \quad h'(t) = -\mu u_x(t, h(t))$$

  Du-Lou (JEMS 17(2015)),...

- 移流拡散型方程式, $I_t = [g(t), h(t)]$

$$u_t - u_{xx} + \beta u_x = f(u),$$

  Gu-Lin-Lou (Appl. Math. Lett. 37 (2014),

  Kaneko-Matsuzawa (JMAA 418 (2015),...

- 時間空間変数依存型方程式

$$u_t = u_{xx} + u(a(t,x) - b(t,x)u)$$

  Du-Guo-Peng (J. Funct. Anal. 265 (2013),

  Zhou-Xiao (JDE 256 (2014),**Lei-Lin-Zhang** (JDE 257 (2014),

  M.X.Wang (JDE 258(2015),...

多次元空間の方程式

$$\begin{aligned} &u_t = d\Delta u + f(u) && \text{in} \quad \Omega(t), \\ &u = 0 \quad \text{and } u_t = \mu |\nabla_x u|^2 && \text{on} \quad \Gamma(t) := \partial\Omega(t) \end{aligned}$$

- 球対称領域

  Du-Guo (JDE 253(2012)), **Kaneko** (NA-RWA 18(2014)),...

- 一般領域

  Du-Matano-Wang (Arch. Rational Mech. Anal. 212(2014)),

  Du-Matsuzawa-Zhou (J. Math. Pures Appl. 103(2015)), ...

二種モデル

Mimura-Yamada-Yotsutani (JJAM 2(1985), Hiroshma M.J. 16(1986,...),

Z. Lin (Nonlinearity 20(2007),

Guo-Wu (J. Dyn. Diff. Equat. 24 (2012),..

.....

- 反応拡散近似

  Hilhorst-Martin-Mimura (JMAA 390 (2012),...