変分的構造をもつ反応拡散系と安定性解析

龍谷大学・理工学部　森田　善久（Yoshihisa Morita）
Department of Applied Mathematics and Informatics
Ryukoku University

1　序

まず次の半線形拡散方程式 (反応拡散方程式) から始める:

$$u_t = d\Delta u + f(u), \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

境界条件はノイマン境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

を課す．以下では，領域 Ω は有界でその境界 $\partial\Omega$ は十分滑らか (C^3 級) とし，f は C^1 級の滑らかさをもつとする．また，初期条件

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad (x \in \overline{\Omega}) \tag{1.3}$$

が適当なクラスに入っていれば，滑らかな解が時間大域的に存在する (爆発解のようなものは考えない)．この初期値問題の解を $u(\cdot,t;u_0)$ とすると，$S(t)u_0 := u(\cdot,t;u_0)$ によって半流 (semiflow)$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ が適当な相空間 X で定義される． 例えば，$X = C^0(\overline{\Omega})$ や，ソボレフ空間 $H^s(\Omega)$ など ([34], [18], [43])．どのような空間をとるかは，数学的議論の展開しやすさに依存するので，必要なときにはそれを明示することにする．以下では，特に断る必要がない場合は境界条件は (1.2) を仮定し，初期条件についても誤解がなければ説明のときに言及しない．

(1.1) では，$f(\overline{u}) = 0$ を満たす定数 $u = \overline{u}$ は，空間変数 x に依存しない定数定常解 (平衡解) になっている．また，(1.1) はエネルギー汎関数

$$\mathcal{E}_0(u) = \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\,dx, \qquad F(u) := \int_0^u f(s)ds \tag{1.4}$$

の勾配流 (gradient flow) になっている．実際，$u = u(x)$ をノイマン条件を満たす十分なめらかな関数として，$\mathcal{E}_0(u)$ の変分をとり，部分積分すると

$$\delta\mathcal{E}_0(u) = -(\Delta u + f(u), \delta u)_{L^2}$$

より，

$$\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{E}_0(u) = -(d\Delta u + f(u)).$$

解を $\mathcal{E}(u)$ に代入して t で微分すると

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_0(u(\cdot,t)) = -(\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{E}_0(u), u_t)_{L^2} = -\|u_t\|^2 \leq 0.$$

これから，解の $t \to \infty$ の漸近状態は制約され，時間周期解のようなものは存在しない．力学系の用語を用いると，相空間における解の軌道の ω 極限集合は平衡解から成ることが知られている ([56])．

ところが，(1.1) のような方程式の場合にはもう少し強いことが示され，空間次元 $n=1$ の場合では，ω 極限集合は必ず 1 点 (一つの平衡解) からなり ([34])，空間次元に関わらず領域が凸なら非定数の平衡解は不安定である ([3], [34])．よって安定な定数でない解を探すためには非凸な領域で考える必要がある．例えば反応項が $f(u) = u - u^3$ のような場合は，拡散を考慮しない常微分方程式は 2 つの漸近安定な平衡解をもつ．この $f(u)$ に対しては亜鈴型の領域で，安定な空間的非一様な解が構成できることがよく知られている ([57], [20], [21], [22], [73], [34], [35], [37] など).

さて，(1.1) を基に，次のような 2 変数の反応拡散系を考えよう．

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + f(u) + v, \\ \tau v_t = \Delta v - \gamma v + u, \end{cases} \qquad x \in \Omega. \tag{1.5}$$

ここで，τ, γ は正のパラメータである．v の拡散係数は 1 に正規化してある．境界条件はノイマン境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{1.6}$$

この場合も，実は (1.5) は次のエネルギー汎関数に関して勾配流になっている:

$$\mathcal{E}_1(u,v) := \mathcal{E}_0(u) + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 - uv\,dx. \tag{1.7}$$

実際，

$$u_t = -\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{E}_1(u,v), \qquad \tau v_t = -\frac{\delta}{\delta v}\mathcal{E}_1(u,v).$$

よって [23](または [33]) より，凸領域では安定な解は定数解しか存在しない．ただし，勾配系の一つである Ginzburg-Landau 方程式では，適当な非凸領域において安定な非定数平衡解が存在する ([27], [24]).

次に，(1.5) の u に関する方程式において v の項の符号を変えた次の方程式系を考えてみよう．

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + f(u) - v, \\ \tau v_t = \Delta v - \gamma v + u, \end{cases} \qquad x \in \Omega. \tag{1.8}$$

この場合，上のような勾配流にはならず，

$$\mathcal{E}_s(u,v) := \mathcal{E}_0(u) - \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 - uv\,dx \tag{1.9}$$

を導入すると

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \tau v_t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta u}\mathcal{E}_s(u,v) \\ \frac{\delta}{\delta v}\mathcal{E}_s(u,v) \end{pmatrix}$$

と表され，歪勾配流 (skew gradient flow) と呼ばれる ([50])．$f(u)$ が 3 次関数の場合は，FitzHugh-Nagumo 方程式とよばれ，パラメータの取り方によって安定な非定数定常解の存在が知られている ([9], [40], [42], [49] および無限区間の場合の研究 [6] などを参照)．このように結合の仕方を少し変えるだけで安定解の構造が劇的に変わる場合がある．この形の方程式系については次節で詳しく調べることにする．

注意 1 このような歪勾配流の平衡解の安定性についてはいくつかの一般的結果が知られている ([4], [30], [50], [51])．

次に，(1.1) の方程式と v の方程式を以下のように結合した系を考える．

$$\begin{cases} \xi u_t - \alpha v_t = d\Delta u + f(u) + v, \\ \eta u_t + \beta v_t = \Delta v. \end{cases} \tag{1.10}$$

ただし，ξ, η は正の定数で $\alpha, \beta \geq 0$ ある．これまでと同様に領域 Ω は有界な領域とし，ノイマン境界条件を課す．この方程式系の大きな特徴は

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\eta u + \beta v)dx = \int_\Omega \Delta v dx = 0$$

により $\eta u + \beta v$ の L^1 量が保存されることである．$\beta > 0$ のときは，$w = \eta u + \beta v$ とおくと，方程式は

$$\begin{cases} (\xi + \alpha\eta/\beta)u_t - (\alpha/\beta)w_t = d\Delta u + f(u) - (\eta/\beta)u + w/\beta, \\ w_t = (1/\beta)\Delta w - (\eta/\beta)\Delta u \end{cases}$$

と書き表すこともできる．このときは w の L^1 量が保存される系になっている．

この方程式系の解の安定性に関して, パラメータがある条件を満たす場合ではあるが，特徴的なことがわかっているので ([68], [36], [25], [61], [62]) それについても紹介する．

なお，この小論では上記のような反応拡散方程式系しか扱わないが，反応拡散方程式一般について詳しいことを知りたい方は，最近出版された [52] をお勧めする．

2　FitzHugh-Nagumo型の方程式系

2.1　Turing 不安定性

まず (5.5) において安定な非定数解が現れる性質を理解するために，次の場合について自明解 $(u,v)=(0,0)$ の安定性を調べてみよう．簡単のため $\tau=1$ としておく．

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u_t = d\Delta u + au - u^3 - v, \\ v_t = \Delta v - \gamma v + u, \end{cases} \qquad x \in \Omega.$$

反応項だけの常微分方程式は

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \dot{u} = au - u^3 - v, \\ \dot{v} = -\gamma v + u \end{cases}$$

なので ($\dot{} = d/dt$) 自明解の安定性は，次の行列

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

の固有値を調べればわかる．特性方程式は

$$\lambda^2 - (a-\gamma)\lambda + 1 - a\gamma = 0$$

なので

$$a < \gamma < \frac{1}{a}$$

なら実部が負の固有値からなり，自明解は方程式 (2.1) の解として漸近安定である．方程式 (5.5) において安定性を調べるために，ノイマン境界条件下の $-\Delta$ の固有値を

$$0 = \sigma_1 < \sigma_2 \le \sigma_3 \le \dots$$

とし，フーリエ級数展開を使うと，行列

$$\begin{pmatrix} -d\sigma_j + a & -1 \\ 1 & -\sigma_j - \gamma \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

の固有値を調べる問題に帰着される．このときの特性方程式は

$$\lambda^2 - (-\sigma_j(d+1) + a - \gamma)\lambda + d\sigma_j^2 - (a - d\gamma)\sigma_j + 1 - a\gamma = 0$$

だから，$a\sigma_2 > 1$ なら d を十分小さくとれば負の固有値が存在する．これは Turing 不安定性に他ならない ([48])．分岐理論を適用すると，不安定性が起こるパラメータの臨界値の近傍で安定な空間パターンをもった解が自明解から分岐することを示すことができるが，今回のテーマでないので詳細については触れない ([39] などを参照)．

2.2 Lyapunov 関数

(5.5) における $\tau \to 0$ の極限方程式は，形式的に

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} u_t = d\Delta u + f(u) - v, \\ \Delta v - \gamma v + u = 0, \end{cases} \qquad x \in \Omega$$

となる．境界条件はノイマン境界条件である．$L^2(\Omega)$ の閉作用素 $-\Delta_N$ を

$$-\Delta_N w = -\Delta w, \quad w \in \mathrm{Dom}(-\Delta_N) := \{\phi \in H^2(\Omega) : \partial\phi/\partial\nu = 0 \ \ (x \in \partial\Omega)\}$$

とすると，(2.3) の第 2 式は

$$v = K(u) := (-\Delta_N + \gamma)^{-1} u$$

と表されるから，結局 u だけの方程式

$$\text{(2.4)} \qquad u_t = d\Delta u + f(u) - K(u), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \ \ x \in \partial\Omega$$

が得られる．この時間発展の方程式は次のエネルギー汎関数の勾配流になっている．

$$\text{(2.5)} \qquad \mathcal{E}_K(u) := \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u) + \frac{1}{2}uK(u)\,dx.$$

K は L^2 内積に関して自己共役な有界作用素になっていることに注意しておこう．$f(u) = u - u^3$ のような場合には，大域アトラクタ (global attractor) $\mathcal{A}_f$ が存在する ([8], [56], [44] 参照)．

一方，(5.5) の場合には次の汎関数を定義する．

$$\text{(2.6)} \qquad \mathcal{E}_F(u,v) := \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u) + \frac{1}{2}uK(u) + \frac{\gamma}{2(1+\delta)}(v - K(u))^2\,dx.$$

以下のことが示される．

命題 2.1 ([5]) $0 < \tau^{1/2} < \gamma$ とする．$\delta \in (0, 2(\gamma^2/\tau - 1))$ なる任意の δ を固定する．(5.5) の滑らかな解 $(u(x,t), v(x,t))$ に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_F(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \le -\frac{\delta}{2(1+\delta)}\|u_t\|^2 \\ -\frac{1}{1+\delta}\left(\frac{\gamma^2}{\tau} - 1 - \frac{\delta}{2}\right)\|v - K(u)\|^2 - \frac{\gamma}{(1+\delta)\tau}\|\nabla(v - K(u))\|^2 \le 0$$

が成り立つ．また，

$$\text{(2.7)} \qquad \frac{d}{dt}\mathcal{E}_F(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) = 0 \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つのは $(u(\cdot,t), v(\cdot,t))$ が平衡解のときのみである．

[証明]　新しい変数を $w = v - K(u)$ とすると方程式は

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + f(u) - K(u) - w, \\ \tau(w_t + K(u_t)) = \Delta w - \gamma w \end{cases} \tag{2.8}$$

となる．$\tilde{\mathcal{E}}_F(u,w) := \mathcal{E}_F(u, w + K(u))$ とおき，K は自己共役，$\|K(u)\| \le \|u\|/\gamma$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}}_F(u(\cdot,t), w(\cdot,t)) \\
&= \int_\Omega \{d\nabla u \cdot \nabla u_t - f(u)u_t + \frac{1}{2}(u_t K(u) + uK(u_t)) + \frac{\gamma}{1+\delta} w w_t\} dx \\
&= -\int_\Omega (d\Delta u + f(u) - K(u)) u_t dx + \frac{\gamma}{1+\delta}(w, w_t)_{L^2} \\
&= -\|u_t\|^2 - (w, u_t)_{L^2} + \frac{\gamma}{1+\delta}(w, -K(u_t) + \frac{1}{\tau}\Delta w - \frac{\gamma}{\tau} w)_{L^2} \\
&= -\|u_t\|^2 - (w, u_t)_{L^2} - \frac{\gamma}{1+\delta}\left\{(w, K(u_t))_{L^2} + \frac{1}{\tau}(\|\nabla w\|^2 + \gamma\|w\|^2)\right\} \\
&\le -\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{\gamma}{(1+\delta)}(K(w), u_t)_{L^2} \\
&\qquad - \frac{\gamma^2}{(1+\delta)\tau}\|w\|^2 - \frac{\gamma}{(1+\delta)\tau}\|\nabla w\|^2 \\
&\le -\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{(1+\delta)}\|w\|\|u_t\| - \frac{\gamma^2}{(1+\delta)\tau}\|w\|^2 - \frac{\gamma}{(1+\delta)\tau}\|\nabla w\|^2 \\
&\le -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right)\|u_t\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+\delta)} - \frac{\gamma^2}{(1+\delta)\tau}\right)\|w\|^2 \\
&\qquad - \frac{\gamma}{(1+\delta)\tau}\|\nabla w\|^2 \\
&\le -\frac{\delta}{2(1+\delta)}\|u_t\|^2 - \frac{1}{1+\delta}\left(\frac{\gamma^2}{\tau} - 1 - \frac{\delta}{2}\right)\|w\|^2 - \frac{\gamma}{(1+\delta)\tau}\|\nabla w\|^2 \le 0.
\end{aligned}$$

よって前半部分が証明された．後半は容易に得られるので詳細は割愛する．　□

注意 2 $\tau^{1/2} = \gamma$ のときにも，$\mathcal{E}_F$ は軌道に沿って単調非増加である．実際

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_F(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) = -\frac{\gamma}{\tau}\|\nabla(v - K(u))\|^2 \le 0.$$

しかし，(2.7) が成り立つのは $(u(\cdot,t), v(\cdot,t))$ が平衡解のときのみとは限らない．

注意 3 $f(u) = u - u^3$ のような 3 次関数の場合には初期値問題の解が生成する半流は大域アトラクタ $\mathcal{A}_f$ を有する ([56],[47])．平衡解全体の集合を E_f とし，それが有界な場合には，

$$\mathcal{A}_f = W^u(E_f) := \{u_0 \in X : u(\cdot, t; u_0) \to E_f \quad (t \to -\infty)\}$$

である． さらに全ての平衡解が双曲型（線形化固有値問題がゼロ固有値を持たない）なら

$$\mathcal{A}_f = \bigcup_{u^* \in E_f} W^u(u^*)$$

と表される. これによって, 大域アトラクタの構造は平衡解の不安定多様体 (unstable manifold) から完全に決定される. ただし, 全ての不安定多様体を決定することは決して容易なことではない (スカラーの反応拡散方程式の場合には, 大域アトラクタの詳細な構造についての研究として [11], [12] などがある).

注意 4 [14] では，別な形の Lyapunov 関数が示されている．Lyapunov 関数が存在する条件についても上記のものと少し異なる．以下，それを紹介しよう．序章でも触れたが，FitzHugh-Nagumo 方程式は歪勾配系とよばれ，(1.9) のエネルギー関数

$$\mathcal{E}_s(u,v) = \int_\Omega \left\{ \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u) - \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + uv - \frac{\gamma}{2}v^2 \right\} dx$$

に解を代入して時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_s(u,v) = -\int_\Omega u_t^2\,dx + \tau \int_\Omega v_t^2\,dx$$

となる．そこで解の軌道に沿った汎関数

$$\mathcal{E}_L(u,v) := \frac{\tau}{\gamma}\int_\Omega \frac{1}{2}(u_t^2 + \tau v_t^2) + E_s(u,v)$$

を定義すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{E}_L(u,v) = \frac{\tau}{\gamma}\int_\Omega (u_t u_{tt} + \tau v_t v_{tt}) + \frac{d}{dt}E_s(u,v)\\
&= \frac{\tau}{\gamma}\int_\Omega \{u_t(d\Delta u_t + f'(u)u_t - v_t) + v_t(\Delta v_t - \gamma v_t + u_t)\}dx - \int_\Omega u_t^2\,dx + \tau\int_\Omega v_t^2\,dx\\
&= -\frac{\tau}{\gamma}\int_\Omega (d|\nabla u_t|^2 + |\nabla v_t|^2)dx - \int_\Omega (1 - (\tau/\gamma)f'(u))u_t^2\,dx
\end{aligned}$$

となる．そこで

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} f'(u) < \gamma/\tau$$

なら，$\mathcal{E}_L$ は時間に関して非増加である．大域アトラクタが存在するような場合にはその近傍でこの条件が満たされていれば，$\mathcal{E}_L$ はリャプノフ関数として働く．これが [14] におけるリャプノフ関数である．2 つのリャプノフ関数 $\mathcal{E}_F$ と $\mathcal{E}_L$ の間に何か関係があるかどうかは不明である．

注意 5 v の方程式にも拡散係数 D をつけてそれを無限大にした極限として得られるシャドーシステムとよばれる方程式の Lyapunov 関数と，D をゼロにしたとき

の Lyapunov 関数はそれぞれ [29] および [44] において与えられており，それらは，ちょうど今回の Lyapunov 関数において対応する極限をとったものとして導かれる．実際, σ_j をノイマン条件下の $-\Delta$ の j 番目の固有値，φ_j を対応する正規化された固有関数とすると，形式的に

$$(-D\Delta_N+\gamma)^{-1}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\cdot,\varphi_j)_{L^2}}{D\sigma_j+\gamma}\varphi_j\to\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma}(\cdot,\varphi_1)_{L^2}\varphi_1=\dfrac{1}{\gamma|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega\cdot\,dx & (D\to\infty),\\[2ex] \dfrac{1}{\gamma}I_{id} & (D\to+0)\end{cases}$$

で，I_{id} は恒等変換である．それぞれの場合の Lyapunov 関数は

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\infty(u,v):=&\int_\Omega\frac{d}{2}|\nabla u|^2-F(u)+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx\right)^2\\&+\frac{\gamma}{2(1+\delta)}\left(v-\frac{1}{\gamma|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx\right)^2dx,\\ \mathcal{E}_0(u,v):=&\int_\Omega\frac{d}{2}|\nabla u|^2-F(u)+\frac{u^2}{2\gamma}+\frac{\gamma}{2(1+\delta)}(v-u/\gamma)^2\,dx\end{aligned}$$

となる．[29] と [44] では，これらの式で $\delta=0$ としたものが Lyapunov 関数として使われている．

2.3 平衡解の不安定次元

一般に (5.5) の定常問題

$$\text{(2.9)}\qquad\begin{cases}d\Delta u+f(u)-v=0,\\ \Delta v-\gamma v+u=0,\end{cases}\qquad x\in\Omega,\qquad\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial v}{\partial\nu}=0,\quad x\in\partial\Omega$$

について考えてみよう． 第 2 式から $v=K(u)(=(-\Delta_N-\gamma)^{-1}u)$ だから第 1 式に代入すると u だけの方程式

$$\text{(2.10)}\qquad d\Delta u+f(u)-K(u)=0,\quad x\in\Omega,\qquad\frac{\partial u}{\partial\nu}=0,\quad x\in\partial\Omega$$

に帰着される．この方程式は (2.4) の定常問題と同じで (2.5) の Euler-Lagrange 方程式になっている．定常問題の解 (u,v) は，この汎関数の臨界値を与える $u=u^*$ から $(u,v)=(u^*,K(u^*))$ として決まる．このような変分問題では，汎関数を最小にする関数 (minimizer) を調べる研究が発展しており，$d=\varepsilon^2$ が小さいとき，あるいは ε の特異極限における解の形状の特徴付けについて優れた研究がある ([40], [42], [49] など).

さて，自然な疑問として (2.4) の平衡解 $u^*(x)$ の安定性 (または不安定性) と，元の系 (5.5) における解 $(u^*, K(u^*))$ の安定性 (または不安定性) に関してどのような関係があるだろうか？　一般に，上記のような汎関数の臨界点の不安定度を表すモース指数 (Morse index) が知られている．臨界値をとる解 u^* の周りで汎関数の第 2 変分を考えてみよう．すなわち

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}_K(u+s\varphi)_{|s=0} = \int_\Omega d|\nabla\varphi|^2 - f'(u^*(x))|\varphi|^2 + \varphi K(\varphi)\,dx.$$

Rayleigh 商

$$R_a(\varphi) := \frac{\mathcal{K}(\varphi)}{\|\varphi\|^2}, \qquad \mathcal{K}(\varphi) := d\|\nabla\varphi\|^2 - (f'(u^*), \varphi)_{L^2} + (K(\varphi), \varphi)_{L^2} \tag{2.11}$$

を用いると, $\mathcal{M}_k$ を $L^2(\Omega)$ における k 次元部分空間全体の集合として

$$\lambda_k := \inf_{X\in\mathcal{M}_k} \sup_{\varphi\in X} R_a(\varphi) \tag{2.12}$$

が，k 番目の線形化固有値問題の固有値を与える ([10])．すなわち，λ_k は方程式 (2.10) において u^* の周りで線形化固有値問題

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\varphi) := -[d\Delta\varphi + f'(u^*)\varphi - K(\varphi)] = \lambda\varphi, \\ &\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \{w \in H^2(\Omega) : \partial w/\partial\nu = 0 \ \ (x \in \partial\Omega)\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

の k 番目の固有値である．Morse 指数はこの線形化作用素の固有値の負の個数として決まる．

一方，(5.5) の平衡解 $(u,v) = (u^*, K(u^*))$ の線形化固有値問題は

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[d\Delta\phi + f'(u^*)\phi - \psi] \\ -\Delta\psi + \gamma\psi - \phi \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}, \\ &\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \{(w,z) \in (H^2(\Omega))^2 : \partial w/\partial\nu = \partial z/\partial\nu = 0 \ \ (x \in \partial\Omega)\} \end{aligned} \tag{2.14}$$

である．作用素 $\mathcal{L}$ は自己共役だが，$\mathcal{A}$ はそうでない．しかし，$\mathcal{L}$ の Morse 指数と $\mathcal{A}$ の不安定固有値 (負の固有値) の個数は比べることができる．実際，以下のような結果がある．

定理 2.2 ([5])　$0 < \tau < \gamma^2$ を仮定する．$\mathrm{Re}\lambda < (\gamma - \tau^{1/2})/\tau$ を満たす $\mathcal{A}$ の固有値は全て実で，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{L}$ は同じ数の負の固有値をもつ．さらに $\gamma > 1$ を仮定すると，$\mathrm{Re}\lambda < (\gamma - 1)/\tau$ を満たす $\mathcal{A}$ の固有値については，その代数的重複度と幾何学的重複度は一致し，(2.10) の平衡解 u^* のモース指数と，(5.5) の平衡解 (u^*, v^*) の不安定次元は一致する．また，零固有値は存在すれば重複度が等しい．

この証明のポイントは，２つの線形化作用素の固有値に対して比較原理を適用することである．そのとき，第 5 節で述べる固有値問題のパラメータに関する依存性 (連続性と単調性) が証明のキーになる．次の節でこの証明を与える．

注意 6 非線形の問題に関する線形化固有値問題の比較原理 (spectral comparison principle) はもともと，[1] によって Cahn-Hilliard 方程式と, 後に出てくる phase-field 系の研究で導入された．最近までは目立った進展はなかったが，後の保存系の場合に [36] から始まって [25], [61]，上記の FitzHugh-Nagumo 型は [5] によってその研究が発展した．

注意 7 代数的重複度と幾何学的重複度は一致するということは，ジョルダン型の多重度をもつ固有値が存在しないということを意味する．また，$\mathcal{A}$ が零固有値をもてば $\mathcal{L}$ もそうであり，また逆もいえることに注意しておく.

注意 8 パラメータに関する同じ条件のときに，u^* が $\mathcal{E}_K$ の local minimizer のとき，$(u^*, K(u^*))$ が (5.5) の安定解になることは，[40] で証明されている．上の定理はさらにそれを発展させた結果になっている．

注意 9 時間発展の方程式

$$u_t = d\Delta u + f(u) - K(u), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

はエネルギー関数 $\mathcal{E}_K(u)$ の勾配流になっているが，上の定理の条件が満たされているとき，平衡解の近傍の解のダイナミクスと方程式系 (5.5) の対応する平衡解の近傍のダイナミクスは，相空間における運動としては定性的に同じ挙動になることを意味している．大域的な運動についての比較も興味ある問題である．

2.4 固有値比較

この節では定理 2.2 を証明しよう．まず，次の補題を証明する．

補題 2.3 $\mathcal{A}$ を (2.14) で定義される線形化作用素とする．$0 < \tau < \gamma^2$ を仮定する．λ を $\mathrm{Re}\lambda \le (\gamma - \tau^{1/2})/\tau$ を満たす $\mathcal{A}$ の固有値とするとそれは実固有値である.

[証明]　仮定を満たす固有値を $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ とおき，対応する固有関数を (ϕ, ψ) とする. $\phi = \phi_r + i\phi_i$ かつ $\psi = \psi_r + i\psi_i$ とおくと

$$d\|\nabla\phi\|^2 - \int_\Omega a(x)|\phi|^2 dx + \int_\Omega \psi\overline{\phi} dx = (\lambda_r + i\lambda_i)\|\phi\|^2,$$
$$\|\nabla\psi\|^2 + \gamma\|\psi\|^2 - \int_\Omega \phi\overline{\psi} dx = \tau(\lambda_r + i\lambda_i)\|\psi\|^2,$$

ここで $a(x) := f'(u^*(x))$. $\lambda_i \neq 0$ なら上の式の虚部から

$$\|\phi\|^2 = \tau\|\psi\|^2 = \frac{1}{\lambda_i}\int_\Omega (\phi_r\psi_i - \phi_i\psi_r) dx.$$

次の
$$\int_\Omega (\phi_r\psi_r+\phi_i\psi_i)dx \le \|\phi\|\|\psi\| = \tau^{1/2}\|\psi\|^2,$$
を使うと，
$$\tau\lambda_r\|\psi\|^2 = \|\nabla\psi\|^2+\gamma\|\psi\|^2-\int_\Omega(\phi_r\psi_r+\phi_i\psi_i)dx \ge \|\nabla\psi\|^2+(\gamma-\tau^{1/2})\|\psi\|^2.$$
これは
$$\|\nabla\psi\|^2 \le \{\tau\lambda_r-(\gamma-\tau^{1/2})\}\|\psi\|^2$$
を意味する．もし，$\lambda_r<(\gamma-\tau^{1/2})/\tau$ なら $\psi=0$ で $\phi=0$, よって矛盾．こうして $\lambda_i=0$ が従う． □

次の補題によって，定理 2.2 の固有値の重複度に関する主張 (代数的重複度と幾何的重複度の一致) が証明されたことになる．

補題 2.4 $0<\tau<\gamma^2$ と $\gamma>1$ を仮定する．λ を
$$\mathrm{Re}\lambda<\min\{(\gamma-\tau^{1/2})/\tau,(\gamma-1)/\tau\}$$
を満たす $\mathcal{A}$ の任意の固有値とする．このとき

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda I_\tau)=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda I_\tau)^m \quad (m\ge 2), \quad I_\tau := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau I \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

ここで I は恒等作用素である.

[証明]　補題 2.3 により λ は実である. まず,
$$(\mathcal{A}-\lambda I_\tau)^2\begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{pmatrix}=0$$
を満たす $(\phi_1,\psi_1)^T$ は λ に対する固有関数以外にはあり得ないことを示す. 背理法を使う.

$$\begin{pmatrix}\phi_0\\ \psi_0\end{pmatrix} := (\mathcal{A}-\lambda I_\tau)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

を仮定して矛盾を導く．(2.16) から

$$-d\Delta\phi_1-f'(u^*)\phi_1+\psi_1-\lambda\phi_1=\phi_0, \tag{2.17}$$
$$-\Delta\psi_1+\gamma\psi_1-\phi_1-\tau\lambda\psi_1=\psi_0 \tag{2.18}$$

である．
$$(\mathcal{A}-\lambda I_\tau)\begin{pmatrix}\phi_0\\ \psi_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

なので

$$\begin{aligned}0 &= (-\Delta\psi_0 + \gamma\psi_0 - \phi_0 - \tau\lambda\psi_0, \psi_0)_{L^2}\\ &= \|\nabla\psi_0\|^2 + (\gamma - \tau\lambda)\|\psi_0\|^2 - (\phi_0, \psi_0)_{L^2}\\ &\geq (\gamma - \tau\lambda)\|\psi_0\|^2 - \|\phi_0\|\|\psi_0\|\end{aligned}$$

が従う．こうして $\psi_0 = 0$ または $(\gamma - \tau\lambda)\|\psi_0\| \leq \|\phi_0\|$ が成立する．$\psi_0 = 0$ から $\phi_0 = 0$ が従うので，この場合は除外する．一方，$(\gamma - \tau\lambda)\|\psi_0\| \leq \|\phi_0\|$ の場合は，仮定 $\lambda < (\gamma - 1)/\tau$ から

$$\|\phi_0\| \geq (\gamma - \tau\lambda)\|\psi_0\| > \|\psi_0\| \tag{2.19}$$

が成り立つ．しかしながら，以下の議論から (2.19) に矛盾することが導かれる．

$\mathcal{A}$ の共役作用素 $\mathcal{A}^*$ を定義する．

$$\mathcal{A}^* \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} := -\begin{pmatrix} d\Delta\tilde{\phi} + f'(u^*)\tilde{\phi} + \tilde{\psi} \\ \Delta\tilde{\psi} - \gamma\tilde{\psi} - \tilde{\phi} \end{pmatrix}.$$

すなわち $(\phi, \psi)^T \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})^T \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*)$ に対し，

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{A}\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}\right)_{L^2\times L^2}\\ &= -(d\Delta\phi + f'(u^*)\phi - \psi, \tilde{\phi})_{L^2} - (\Delta\psi - \gamma\psi + \phi, \tilde{\psi})_{L^2}\\ &= -(\phi, d\Delta\tilde{\phi} + f'(u^*)\tilde{\phi} + \tilde{\psi})_{L^2} - (\psi, \Delta\tilde{\psi} - \gamma\tilde{\psi} - \tilde{\phi})_{L^2}\\ &= \left(\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \mathcal{A}^*\begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}\right)_{L^2\times L^2}.\end{aligned}$$

$\mathcal{A}^* - \lambda I_\tau$ の核を $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^* - \lambda I_\tau)$ とする．$(\phi_0, -\psi_0)^T \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^* - \lambda I_\tau)$ がすぐ確かめられる．方程式 (2.16) の可解条件から

$$\left(\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\psi_0 \end{pmatrix}\right)_{L^2\times L^2} = \|\phi_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 = 0.$$

これは (2.19) に矛盾するので，$m = 2$ 場合は証明できた．

一般に

$$(\mathcal{A} - \lambda_0 I_\tau)^m \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (m \geq 2),$$

の場合は，同様の議論によって

$$(\mathcal{A} - \lambda_0 I_\tau) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が示される．実際，

$$\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = (\mathcal{A} - \lambda_0 I_\tau)^{k-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

を満たす $(\phi_0, \psi_0) \neq (0, 0)$ が存在する最も小さい $k \geq 2$ に対して, 同様の議論を適用すれば矛盾が導かれる．こうして証明終了．□

注意 10 $\mathcal{A}$ の固有関数が (ϕ,ψ) なら，共役作用素 $\mathcal{A}^*$ の固有関数が $(\phi,-\psi)$ で与えられることが，この FitzHugh-Nagumo 方程式系の特徴で，一般にこれに対応する性質を歪勾配系がもつことが定式化されている ([51]).

さて，以上の準備のもとに，$\mathcal{A}$ の固有値と $\mathcal{L}$ の固有値を比較しよう．$\mathcal{A}$ の固有値問題は次のように書ける：

$$\begin{cases} -d\Delta\phi - a(x)\phi + \psi = \lambda\phi, \\ -\Delta\psi + \gamma\psi - \phi = \tau\lambda\psi, \end{cases} \quad x\in\Omega, \tag{2.20}$$

$$\partial\phi/\partial\nu = \partial\psi/\partial\nu = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.21}$$

ここで $a(x) = f'(u^*(x))$ とおいた．$L^2(\Omega)$ における有界作用素

$$K_\lambda := (-d\Delta_N + \gamma - \tau\lambda)^{-1} \tag{2.22}$$

を $\lambda < (\gamma - \tau^{1/2})/\tau$ に対して定義する．この K_λ と (2.13) で定義される $\mathcal{L}$ を用いると，$\mathcal{A}$ の固有値問題は

$$(\mathcal{L} - K + K_\lambda)\phi = \lambda\phi, \quad \phi \in H_N^2(\Omega) \tag{2.23}$$

と書き直される．すなわち，$\mathcal{A}$ の固有値問題と (2.23) は，$\psi = K_\lambda\phi$ とおけば $\lambda < (\gamma - \tau^{1/2})/\tau$ の制約下では同値である．

以下では，

$$A_N = -d\Delta_N$$

とおく．$K_0 = K$ なので，

$$K_\lambda - K = \tau\lambda K_\lambda K = \tau\lambda K K_\lambda, \tag{2.24}$$

が成り立つ (K_λ は A_N のリゾルベントになっていることに注意)．この (2.24) によって (2.23) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi &= \lambda(1-\tau K_\lambda K)\phi \\ &= \lambda[1 - \tau(A_N + \gamma - \tau\lambda)^{-1}(A_N+\gamma)^{-1}]\phi, \quad \phi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \end{aligned} \tag{2.25}$$

と表される．

$0 < \tau < \gamma^2$ and $\lambda < (\gamma - \tau^{1/2})/\tau$ の条件のもとでは，

$$((1-\tau K_\lambda K)\phi, \phi)_{L^2} > 0 \quad (\phi \neq 0). \tag{2.26}$$

実際，$\lambda < (\gamma - \tau^{1/2})/\tau$ から $\dfrac{\tau}{\gamma - \tau\lambda} < \tau^{1/2}$. $\phi \neq 0$ に対して

$$\tau(K_\lambda K\phi, \phi)_{L^2} \le \frac{\tau}{(\gamma - \tau\lambda)\gamma}\|\phi\|^2 < \frac{\tau^{1/2}}{\gamma}\|\phi\|^2,$$

こうして (2.26) が従う．

$s > -(\gamma - \tau^{1/2})$ に対して

$$M(s) := I - \tau(A_N + \gamma + s)^{-1}(A_N + \gamma)^{-1} \tag{2.27}$$

を定義すると，

$$(M(s)\phi, \phi)_{L^2} > 0 \qquad (\phi \in L^2(\Omega), \phi \neq 0)$$

である．この $M(s)$ によって $\mathcal{A}$ の固有値問題，すなわち (2.25) は

$$\mathcal{L}\phi = \lambda M(-\tau\lambda)\phi \tag{2.28}$$

を満たす λ と ϕ を決定する問題に帰着される．

補題 2.5 (2.27) で定義される $M(s)$ は第 5 節の条件 (H1), (H2) と (H3) を満たす．

[証明]　条件の (H1) は

$$\frac{d}{ds}M(s) = \tau(A_N + \gamma + s)^{-2}(A_N + \gamma)^{-1}$$

が正値作用素であることから従う．

次に (H2) を確かめる．まず，

$$s_2 M(s_1) - s_1 M(s_2) = (s_2 - s_1)\{I - \tau(A_N + \gamma + s_2)^{-1}(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\} \tag{2.29}$$

を示す．

$$\begin{aligned}
&s_2 M(s_1) - s_1 M(s_2)\\
&\quad = (s_2 - s_1)I - \tau\{s_2(A_N + \gamma + s_2)^{-1} - s_1(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\}(A_N + \gamma)^{-1}\\
&\quad = (s_2 - s_1)I - \tau(A_N + \gamma + s_2)^{-1}\{(s_2 - s_1)I\\
&\qquad\qquad\qquad -s_1(s_2 - s_1)(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\}(A_N + \gamma)^{-1}\\
&\quad = (s_2 - s_1)I\\
&\qquad\qquad -\tau(s_2 - s_1)(A_N + \gamma + s_2)^{-1}\{I - s_1(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\}(A_N + \gamma)^{-1}.
\end{aligned}$$

ここで

$$I = (-d\Delta_N + \gamma + s_1 - s_1)(-d\Delta_N + \gamma)^{-1} = (A_N + \gamma + s_1)(I - s_1(A_N + \gamma + s_1)^{-1})(A_N + \gamma)^{-1}$$

より恒等式

$$\{I - s_1(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\}(A_N + \gamma)^{-1} = (A_N + \gamma + s_1)^{-1}$$

が得られるから，これを適用すると

$$s_2 M(s_1) - s_1 M(s_2) \quad = (s_2 - s_1)\{I - \tau(A_N + \gamma + s_2)^{-1}(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\}$$

となり (2.29) が従う．

条件 $\tau^{1/2} < s_1 + \gamma$ と $\tau^{1/2} < s_2 + \gamma$ より

$$\tau((A_N + \gamma + s_2)^{-1}(A_N + \gamma + s_1)^{-1}\phi, \phi)_{L^2} \le \frac{\tau}{(\gamma + s_2)(\gamma + s_1)}\|\phi\|^2 < \|\phi\|^2$$

なので

$$s_2 M(s_1) - s_1 M(s_2) > 0 \quad (s_2 > s_1) \quad \Leftrightarrow \quad M(s_1)/s_1 > M(s_2)/s_2 \quad (s_2 > s_1)$$

より (H2) が従う．(H3) のチェックは容易なので省略する． □

命題 4.1 と命題 4.2 を次の非局所項固有値問題

$$\mathcal{L}\phi = \omega M(s)\phi, \qquad \phi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = H^2_N(\Omega). \tag{2.30}$$

に適用する．パラメータ s に連続的に依存する (4.1) の固有値の族 $\{\omega_n(s)\}$

$$\omega_1(s) \le \omega_2(s) \le \cdots \le \omega_n(s) \le \omega_{n+1}(s) \le \cdots$$

について考える．命題の結果より，負の固有値の個数は s に依存しない．任意の負の固有値について，それを $\omega_k(s)$ とすると，$s \ge 0$ について単調増加なので s についての方程式

$$\omega_j(s) = -s/\tau \quad (s > 0)$$

は $\omega_j(0) < 0$ を考慮するとただ一つの解 $s = s^*_k$ をもつ．$\lambda_k = -s^*_k$ とおくとこれが (2.25) すなわち $\mathcal{A}$ の k 番目の固有値を与える．こうして，$\mathcal{A}$ の負の固有値は重み付きの固有値問題 (4.1) の負の固有値と対応がついた．さらに命題 4.3 を適用すると，負の固有値の数に関する定理の主張が正しいことがわかる．

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{L}$ の零固有値については，それぞれの固有値全体の集合を $\sigma(\mathcal{A})$, $\sigma(\mathcal{L})$ とすると，

$$0 \in \sigma(\mathcal{A}) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(\mathcal{L})$$

である．これによって定理の証明が完了する． □

3 保存則のある拡散方程式系

この節では (1.10) の形の方程式系を扱う．$\alpha = 0$ の場合は，Caginalp [2] や Fix [13] によって導入されたフェイズフィールド (phase field) 方程式の形をしている．(1.10) の形の方程式を直接扱う前に，関連した拡散方程式系についてまず解説する．

3.1 保存則のある方程式系における拡散誘導不安定性

次のタイプの方程式系を考えよう：

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + f(u, v), \\ \tau v_t = \Delta v - f(u, v), \end{cases} \qquad x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Ω は滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の有界領域で，境界条件はノイマン境界条件を仮定する．

まず拡散の無い次の常微分方程式系を調べる．

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u,v), \\ \tau\dot{v} = -f(u,v). \end{cases} \tag{3.2}$$

すぐわかる性質として

$$\frac{d}{dt}(u(t)+\tau v(t)) = 0$$

より，$s = u(t)+\tau v(t)$ とおくと方程式は単独の方程式

$$\dot{u} = f(u,(s-u)/\tau) \tag{3.3}$$

に帰着される．(3.3) の平衡点 u^*, すなわち

$$f(u^*,(s-u^*)/\tau) = 0$$

を満たす定数解は,

$$f_u(u^*,(s-u^*)/\tau) - f_v(u^*,(s-u^*)/\tau)/\tau < 0 \tag{3.4}$$

のとき安定である．

ところで (3.2) の平衡点は

$$f(u,v) = 0$$

を満たす (u,v) 全体である．しかし，

$$u(t)+\tau v(t) = u(0)+\tau v(0) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

なので $s = u(0)+v(0)$ とおけば，初期値を与えたときの平衡点は $f=0$ に加えて拘束条件として $s = u+\tau v$ が課せられる．

(3.2) で $(u,v) = (u^*,v^*)+(U,V)$, $(u^*,v^*) = (u^*,(s-u^*)/\tau)$ とおいて平衡点で (3.2) を線形化すると

$$\begin{cases} \dot{U} = f_u(u^*,v^*)U + f_v(u^*,v^*)V, \\ \tau\dot{V} = -f_u(u^*,v^*)U - f_v(u^*,v^*)V, \end{cases} \tag{3.5}$$

線形化の行列

$$\begin{pmatrix} f_u(u^*,v^*) & f_v(u^*,v^*) \\ -f_u(u^*,v^*)/\tau & -f_v(u^*,v^*)/\tau \end{pmatrix}$$

は固有値

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = f_u(u^*,v^*) - f_v(u^*,v^*)/\tau$$

をもつ．前者の零固有値は保存則から出てくるもので安定性に影響しないことに注意しておく．

さて，(3.1) にもどる．空間平均を

$$\langle u \rangle := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$$

と表すと，

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)+\tau v(x,t)\,dx = 0$$

より，

$$s = \langle u(\cdot,0)\rangle + \tau\langle v(\cdot,0)\rangle = \langle u(\cdot,t)\rangle + \tau\langle v(\cdot,t)\rangle \qquad (t \geq 0) \tag{3.6}$$

の条件のもとで，(3.1) の定数平衡解 (u^*, v^*) の安定性を調べる．(3.4) を仮定して，常微分方程式 (3.2) の平衡解としては安定であることを仮定する．このとき $s = u^* + \tau v^*$ に注意しておく．

ノイマン境界条件下の $-\Delta$ の固有値を $\{\sigma_j\}_{j=1,2,\ldots}$ 対応する正規化された固有関数を $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\ldots}$ とする, すなわち

$$-\Delta\varphi_j = \sigma_j\varphi_j,\ \ x\in\Omega, \qquad \partial\varphi_j/\partial\nu = 0,\ \ x\in\partial\Omega, \qquad (\varphi_j,\varphi_k)_{L^2} = \delta_{jk}$$

とし，

$$(u,v) = (u^*,v^*) + e^{\lambda t}(\xi,\eta)\varphi_j(x)$$

とおいて線形化すると，行列の固有値問題

$$A_j\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \qquad A_j := \begin{pmatrix} -d\sigma_j + f_u(u^*,v^*) & f_v(u^*,v^*) \\ -f_u(u^*,v^*)/\tau & -\sigma_j/\tau - f_v(u^*,v^*)/\tau \end{pmatrix}$$

が得られる．λ の特性方程式は

$$\lambda^2 - (f_u - f_v/\tau - (d+1/\tau)\sigma_j)\lambda + \sigma_j(d\sigma_j + df_v - f_u)/\tau = 0 \tag{3.7}$$

である．$j=1$ のときは $\sigma_j = 0$ より常微分の場合に対応する．$j \geq 2$ の場合を考える．(3.4) とあわせて

$$0 < f_u(u^*,v^*) < f_v(u^*,v^*)/\tau \tag{3.8}$$

なら，d を十分小さくとることによって

$$d\sigma_j + df_v(u^*,v^*) - f_u(u^*,v^*) < 0 \tag{3.9}$$

とすることができ，これを満たす j について不安定となる．すなわち，Turing 型の拡散不安定化が起こる．

注意 11 上の不安定化の議論は初等的な計算で確かめられる．しかし，このような保存系における拡散誘導不安定性の結果はかなり最近 [59], [71] において報告された．もしかしたら，他にも古い文献があるかもしれないが現在のところ見つかっていない．

3.2 保存則のある方程式系における Lyapunov 関数

(3.1) の特別な場合として次の形の方程式系をこの節ではとりあげる．

$$
(3.10) \qquad \begin{cases} u_t = d\Delta u - g(u+\gamma v) + v, \\ \tau v_t = \Delta v + g(u+\gamma v) - v, \end{cases} \qquad x \in \Omega.
$$

ここで $0 < d < 1,\ 0 \le \gamma \le 1,\ k > 0$ とする．前節と同様に Ω は滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の有界領域で，境界条件はノイマン境界条件を仮定する．

このタイプの方程式は，$\tau = 1$ の場合，[59], [71] において具体的な関数として

$$
(3.11) \qquad g(u) = \frac{a_1 u}{a_2 u^2 + b} \quad (\gamma = 0), \qquad g(u+v) = \frac{u+v}{(a(u+v)+1)^2} \quad (\gamma = 1)
$$

が導入され, Turing 型の拡散誘導不安定性が起こることが確かめられている．ここでは [25], [61] および [68] などの Lyapunov 関数に関する成果を統一した形で紹介する．

新しい変数として

$$
w = u + \gamma v, \qquad z = du + v
$$

を導入して方程式を書き直す．

$$
(3.12) \qquad \begin{cases} \frac{1-\tau\gamma d^2}{1-d\gamma} w_t - \frac{\gamma(1-\tau d)}{1-d\gamma} z_t = d\Delta w - (1-\gamma d)g(w) - dw + z, \\ \\ \frac{1-\tau d}{1-d\gamma} w_t + \frac{\tau-\gamma}{1-d\gamma} z_t = \Delta z. \end{cases}
$$

ここで

$$
(3.13) \qquad \gamma \le \tau < \frac{1}{d}
$$

を仮定して

$$
\xi = \frac{1-\tau\gamma d^2}{1-d\gamma}, \qquad \alpha = \frac{\gamma(1-\tau d)}{1-d\gamma}, \qquad \eta = \frac{1-\tau d}{1-d\gamma}, \qquad \beta = \frac{\tau-\gamma}{1-d\gamma}
$$

とおくと，$\xi, \eta > 0,\ \alpha, \beta \ge 0.$ さらに

$$
f(w) = -(1-d\gamma)g(w) - dw
$$

とおくと (5.3) は

$$
(3.14) \qquad \begin{cases} \xi w_t - \alpha z_t = d\Delta w + f(w) + z, \\ \eta w_t + \beta z_t = \Delta z \end{cases}
$$

と表され，(1.10) の形に書き直される．

ここで，

$$
\xi = 1 + \frac{d\gamma(1-\tau d)}{1-d\gamma}
$$

と表せることに注意しておく．

命題 3.1 (3.14) をノイマン境界条件のもとで考える．汎関数

$$\mathcal{E}_c(w,z) := \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla w|^2 - F(w) + \frac{\beta}{2\eta}z^2 + \frac{\alpha}{2\eta}|\nabla z|^2 \ dx$$

を定義する，ただし，$F(w) = \int^w f(w)$ である．任意の滑らかな解 $(w(x,t), z(x,t))$ に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(w(\cdot,t), z(\cdot,t)) = -\int_\Omega \left\{ \xi w_t^2 + \frac{\alpha\beta}{\eta}z_t^2 + \frac{1}{\eta}|\nabla z|^2 \right\} \ dx \leq 0$$

が成り立つ．

[証明]　部分積分の計算を繰り返せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(w(\cdot,t), z(\cdot,t)) \\
&= \int_\Omega d\nabla w \cdot \nabla w_t - f(w)w_t + \frac{\beta}{\eta}zz_t + \frac{\alpha}{\eta}\nabla z \cdot \nabla z_t \, dx \\
&= \int_\Omega (-d\Delta w - f(w))w_t + \frac{\beta}{\eta}zz_t - \frac{\alpha}{\eta}(\Delta z)z_t \, dx \\
&= \int_\Omega (z - \xi w_t + \alpha z_t)w_t + \frac{z}{\eta}(\Delta z - \eta w_t) - \frac{\alpha}{\eta}(\eta w_t + \beta z_t)z_t \, dx \\
&= \int_\Omega \left(-\xi w_t^2 - \frac{1}{\eta}|\nabla z|^2 - \frac{\alpha\beta}{\eta}z_t^2 \right) \, dx.
\end{aligned}$$

これは目的の式である．□

注意 12 (3.10) において $\gamma = 0$ の場合は，

$$\xi = 1, \qquad \alpha = 0, \qquad \eta = 1 - \tau d, \qquad \beta = \tau$$

となるので，(3.14) は

$$\begin{cases} w_t = d\Delta w + f(w) + z, \\ (1-\tau d)w_t + \tau z_t = \Delta z \end{cases} \tag{3.15}$$

となり，$f = w(1-w^2)$ ならフェイズフィールド方程式に他ならないが，今の場合は $f(w) = -g(w) - dw$ である．

一方，　$\tau = \gamma$ の場合は，

$$\xi = 1 + \gamma d, \qquad \alpha = \gamma, \qquad \eta = 1, \qquad \beta = 0$$

となるので

$$\begin{cases} (1+\gamma d)w_t - \gamma z_t = d\Delta w + f(w) + z, \\ w_t = \Delta z. \end{cases} \tag{3.16}$$

最初の方程式の両辺に Δ を作用させると

$$(1+\gamma d)\Delta w_t - \gamma \Delta z_t = \Delta(d\Delta w + f(w)) + \Delta z.$$

２番目の方程式を t で微分すると

$$w_{tt} = \Delta z_t.$$

これと，$w_t = \Delta z$ を用いると

$$w_t + \gamma w_{tt} = -\Delta[d\Delta w + f(w) - (1+\gamma d)w_t] \tag{3.17}$$

となり一つの変数 w で表すことができる．

3.3 定常問題

(5.5)(すなわち (3.14)) の場合の平衡解を調べる．

$$\begin{cases} \xi u_t - \alpha v_t = d\Delta u + f(u) + v, \\ \eta u_t + \beta v_t = \Delta v, \end{cases} \qquad x \in \Omega \tag{3.18}$$

をノイマン境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{3.19}$$

のもとで考える．さらに保存則より

$$m := \eta\langle u\rangle + \beta\langle v\rangle \tag{3.20}$$

とおく．この方程式系の定常問題は

$$\begin{cases} d\Delta u + f(u) + v = 0, \\ \Delta v = 0, \end{cases} \qquad x \in \Omega \tag{3.21}$$

に境界条件 (3.19) と拘束条件 (5.6) が課される．

$\beta \neq 0$ を仮定する．このとき (3.21) の２番目の式から

$$v = \langle v\rangle = \frac{1}{\beta}(m - \eta\langle u\rangle). \tag{3.22}$$

これを (3.21) の最初の式に代入すると

$$d\Delta u + f(u) + \frac{1}{\beta}\left(m - \frac{\eta}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx\right) = 0 \ \ (x \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega) \tag{3.23}$$

が得られる．この方程式は，次のエネルギー汎関数

$$(3.24)\qquad \mathcal{E}_m(u) := \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\,dx + \frac{|\Omega|}{2\beta\eta}\left(m - \frac{\eta}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx\right)^2$$

の Euler-Lagrange 方程式になっている．実際，

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{E}_m(u+\varepsilon\varphi)_{|\varepsilon=0} = \int_\Omega d\nabla u\nabla\varphi - f(u)\varphi - \frac{1}{\beta}\int_\Omega\left(m - \frac{\eta}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx\right)\varphi\,dx$$

よりわかる．

一方，前節より (3.18) は Lyapunov 関数

$$\mathcal{E}_c(u,v) := \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u) + \frac{\beta}{2\eta}v^2 + \frac{\alpha}{2\eta}|\nabla v|^2\ dx$$

をもつ．この式に (3.22) を代入すると

$$(3.25)\qquad \mathcal{E}_c(u,(m-\eta\langle u\rangle)/\beta) = \mathcal{E}_m(u)$$

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(u,v) &= \mathcal{E}_m(u) + \frac{\beta}{2\eta}\|v\|^2 + \frac{\alpha}{2\eta}\|\nabla v\|^2 - \frac{|\Omega|}{2\beta\eta}(m-\eta\langle u\rangle)^2 \\
&= \mathcal{E}_m(u) + \frac{\alpha}{2\eta}\|\nabla v\|^2 + \frac{\beta}{2\eta}\|v-\langle v\rangle\|^2 + \frac{\beta}{2\eta}\|\langle v\rangle\|^2 - \frac{|\Omega|}{2\beta\eta}(m-\eta\langle u\rangle)^2 \\
&= \mathcal{E}_m(u) + \frac{\alpha}{2\eta}\|\nabla v\|^2 + \frac{\beta}{2\eta}\|v-\langle v\rangle\|^2 + \frac{\beta|\Omega|}{2\eta}\langle v\rangle^2 - \frac{|\Omega|}{2\beta\eta}(m-\eta\langle u\rangle)^2 \\
&= \mathcal{E}_m(u) + \frac{\alpha}{2\eta}\|\nabla v\|^2 + \frac{\beta}{2\eta}\|v-\langle v\rangle\|^2.
\end{aligned}$$

ここで (3.22) より

$$\beta^2\langle v\rangle^2 - (m-\eta\langle u\rangle)^2 = (\beta\langle v\rangle - m + \eta\langle u\rangle)(\beta\langle v\rangle + m - \eta\langle u\rangle) = 0$$

を使った．

さて $\beta = 0$ のときは (5.6) は

$$(3.26)\qquad m = \eta\langle u\rangle$$

となり，(3.21) から

$$d\Delta u + f(u) + \langle v\rangle = 0\ \ (x\in\Omega),\quad \frac{\partial u}{\partial\nu} = 0,\ \ x\in\partial\Omega$$

だが, 空間平均をとると

$$\langle f(u)\rangle + \langle v\rangle = 0$$

から，結局

$$d\Delta u + f(u) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u)\,dx = 0,\quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\quad x \in \partial\Omega \tag{3.27}$$

に拘束条件 (3.26) が課される．ここでエネルギー汎関数

$$\mathcal{E}_a(u) := \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\,dx \tag{3.28}$$

について，拘束条件 (3.26) のもとで $H^1(\Omega)$ で変分を考えればその Euler-Lagrange 方程式が (3.27) となる．実際，

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{E}_a(u+\varepsilon\varphi)_{|\varepsilon=0} = \int_\Omega d\nabla u \nabla\varphi - f(u)\varphi\,dx$$

だが拘束条件のため $\langle\varphi\rangle = 0$ を満たすように変分をとるため，

$$d\Delta u + f(u) = \lambda$$

と未定乗数 λ が現れるのである．

さて，$\mathcal{E}_m$ の臨界点 u^* における 2 次の変分問題から導かれる線形化作用素 $\mathcal{L}$ の負の固有値の個数 (Morse 指数) と，平衡解 $(u^*, v^*) = (u^*, (m - \eta\langle u^*\rangle)/\beta)$ における (5.5) の線形化作用素 $\mathcal{A}$ の負の固有値の個数を関係づけることができる．文献の [36] , [25] , [61] において，それぞれ順に $\alpha = 0$ の場合，$\beta = 0$ の場合，$\beta > 0$ の場合が研究されている．

注意 13 2 つの汎関数 $\mathcal{E}_c(u, v)$ と $\mathcal{E}_m(u)$ の間に (3.25) および

$$\mathcal{E}_c(u, v) \geq \mathcal{E}_m(u)$$

が成り立っている．FitzHugh-Nagumo の場合についても，$\mathcal{E}_F$ と $\mathcal{E}_K$ の間に

$$\mathcal{E}_F(u, v) \geq \mathcal{E}_F(u, K(u)) = \mathcal{E}_K(u)$$

が成り立つ．このような性質は semi-unfolding-minimality とよばれ ([45])，フェイズフィールド方程式やこの節で取り上げた保存系について，$\mathcal{E}_m$ の local minimizer u^* が元のシステムの平衡解 (u^*, v^*) のダイナミカルな安定性を与えることを示した研究がある ([61], [62], [76])．

3.4 保存則を持つ系における固有値比較

この節では (3.18) で $\beta = 0$ の場合 (これは (3.10) における $\gamma = \tau = 1$ の場合を含む) について，FitzHugh-Nagumo 方程式について行ったように，システムの平衡解の線形化固有値問題と (3.27) の対応する平衡解に関する線形化固有値問題の固有値を比較する．この結果，(3.27) の場合の考察から，(3.18) の安定解の空間構造に制約があることがわかる．例えば，筒状領域では，安定な解は軸方向に単調性があることが示される．

なお，この $\beta = 0$ 以外に，ファイズフィールド系の形になる $\alpha = 0$ のとき ([36]) と，一般に $\beta > 0$ の場合について固有値比較が研究されている ([61])．しかし，$\beta > 0$ の場合にはパラメータに対して条件が課され，全てのパラメータ値に成り立つような結果は，現時点で完成していない．

(3.18) で $\beta = 0$ の場合は，

$$(3.29) \qquad \begin{cases} \xi u_t - \alpha v_t = d\Delta u + f(u) + v, \\ \eta u_t = \Delta v, \end{cases} \qquad x \in \Omega$$

だから，この平衡解を $(u^*(x), v^*(x))$ とすると線形化固有値問題は

$$(3.30) \qquad \mathcal{A}\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -[d\Delta\phi + f'(u^*)\phi + \psi] \\ -\Delta\psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi\phi - \alpha\psi \\ \eta\phi \end{pmatrix}.$$

ただし，拘束条件 $\langle\phi\rangle = 0$ が付く．

一方 (3.27) の対応する平衡解は $u = u^*(x)$ で，その線形化固有値問題は

$$(3.31) \qquad \mathcal{L}\varphi := -[\Delta\varphi + f'(u^*(x))\varphi - \langle f'(u^*(x))\varphi\rangle] = \mu\varphi, \quad \langle\varphi\rangle = 0$$

である．

まず，次の事実に注意しておく．補題 2.4 と同様の性質が成り立つ．

補題 3.2 $\mathrm{Re}\lambda < \delta$ を満たす固有値問題 (3.30) の固有値 λ は全て実で，

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda J) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda J)^m \quad (m \geq 2), \quad J := \begin{pmatrix} \xi & -\alpha \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つような正の δ が存在する．

[証明] 補題 2.4 と同様な議論を使えば示せる．詳細は各自で確認せよ． □

以下の議論では $\mathrm{Re}\lambda < \delta$ を満たす固有値に限定して (3.30) の $\mathcal{A}$ と (3.31) の $\mathcal{L}$ を比べる．(3.30) をこの $\mathcal{L}$ を使った形に書き直す．正射影

$$Q\psi = \psi - \langle\psi\rangle$$

を導入する．$\langle\phi\rangle = 0$ の場合は $Q\phi = \phi$ に注意して，方程式を Q を使って分解すると

$$
\begin{aligned}
&-[d\Delta\phi + Qf'(u^*)\phi + Q\psi] = \lambda(\xi\phi - \alpha Q\psi) \\
&-\Delta Q\psi = \lambda\eta\phi \\
&-\langle f'(u^*)\phi\rangle + \langle\psi\rangle = \lambda\langle\psi\rangle
\end{aligned}
$$

最後の式から

$$(\lambda - 1)\langle\psi\rangle = \langle f'(u^*)\phi\rangle$$

なので，λ の範囲を制限する δ を最初から小さく絞っておくと，ϕ が決まれば $\langle\psi\rangle$ がただ一つ決まる．

2 番目の式を

$$Q\psi = \lambda\eta(-\Delta_N)^{-1}\phi$$

と書き直し，1 番目の式に代入して整理すると

$$-[d\Delta\phi + Qf'(u^*)\phi] = \lambda(\xi\phi - \alpha\eta\lambda(-\Delta_N)^{-1}\phi + \eta(-\Delta_N)^{-1}\phi) = \lambda[\xi + \eta(1-\alpha\lambda)(-\Delta_N)^{-1}]\phi.$$

ここで，$Qf'(u^*)\phi = f'(u^*)\phi - \langle f'(u^*)\phi\rangle$ を使えば，結局

$$\mathcal{L}\phi = \lambda[\xi + \eta(1-\alpha\lambda)(-\Delta_N)^{-1}]\phi, \quad \langle\phi\rangle = 0 \tag{3.32}$$

と書き直される．

FitzHugh-Nagumo のときと同様に

$$M(s) := \xi + \eta(1+s)(-\Delta_N)^{-1}$$

を定義すると (3.32) は

$$\mathcal{L}\phi = M(-\alpha\lambda)\phi, \qquad \langle\phi\rangle = 0$$

である．この $M(s)$ について，第 5 節の (H1), (H2), (H3) の条件を確かめればよい．詳細は各自で確かめて欲しい.

こうして次の定理を得る．

定理 3.3 (3.30) と (3.31) の負の固有値の数は重複度を込めて一致する．また零固有値についても，存在すれば重複度は一致する．

3.5　固有値比較定理の応用

この節では，前節の定理 3.3 を応用して，保存則をもつ反応拡散系

$$
(3.33) \qquad \begin{cases} u_t = d\Delta u - g(u+v) + v, \\ v_t = \Delta v + g(u+v) - v, \end{cases} \qquad x \in \Omega.
$$

の安定平衡解の空間形状が，領域の形状に大きく依存することを示す．チューリング不安定が起こりうるパラメータ領域 $0 < d < 1$ で考えることにする．

　領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は x_1 軸を軸方向にもつ次の筒状領域

$$
(3.34) \qquad \Omega = (0, L) \times D = \{x = (x_1, y) : 0 < x_1 < L, \;\; y \in D\}
$$

を考える．ここで D は $\mathbb{R}^{n-1}$ の十分滑らかな境界をもつ有界領域である．また，$n = 1$ のときは $\Omega = (0, L)$ とする．

定理 3.4 $0 < d < 1$ とし，(3.33) を領域 (3.34) で考え，ノイマン境界条件を仮定するとその安定な平衡解 $(u, v) = (u^*(x), v^*(x))$ は x_1 方向に単調である．また，$n = 1$ で周期境界条件の場合は，安定平衡解は定数解か，単峰形をしている．

[証明]　ノイマン境界条件の場合をまず示す．変換 $w = u + v, z = du + v$ によって (3.14) の形に書き直すことができるが，いまの場合

$$
\xi = 1 + d, \quad , \alpha = \eta = 1, \quad \beta = 0, \quad f(w) = -(1-d)g(w) - dw
$$

であある．$\Delta z = 0$ より z は一定なので，その定常問題は w の方程式

$$
d\Delta w + f(w) - \langle f(w) \rangle = 0, \qquad \langle w \rangle = m
$$

に帰着される．ここで m は初期条件 $(u_0(x), v_0(x))$ を一つ決めたときに $\langle u_0 + v_0 \rangle = m$ から決まる．この解を $w^* = u^* + v^*$ とすると，

$$
(3.35) \qquad u^*(x) = m - \langle g(w^*) \rangle - \frac{m}{1-d} + \frac{1}{1-d} w^*(x),
$$

$$
(3.36) \qquad v^*(x) = \langle g(w^*) \rangle + \frac{md}{1-d} - \frac{d}{1-d} w^*(x)
$$

と表される．これは $z^* = du^* + v^*$ が定数なので

$$
z^* = du^* + v^* = d\langle u^* \rangle + \langle v^* \rangle = dm + (1-d)\langle v^* \rangle.
$$

一方

$$
d\Delta w^* - (1-d)g(w^*) + (1-d)v^* = 0
$$

より $\langle g(w^*) \rangle = \langle v^* \rangle$ が導かれ，結局

$$
w^* = u^* + v^*, \qquad z^* = du^* + v^* = dm + (1-d)\langle g(w^*) \rangle
$$

より (3.35), (3.36) が得られる．これらの式から，w^* が単調なら u^*, v^* も単調で，また，u^* または v^* が単調でなければ w^* も単調でない．

$w^*(x)$ が単調でないと仮定して，その線形化作用素

(3.37) $$\mathcal{L}\varphi = -[d\Delta\varphi + f'(w^*)\varphi - \langle f'(w^*)\varphi\rangle], \quad \langle\varphi\rangle = 0$$

が常に負の固有値を持つことを示す．前節の結果より，(u^*, v^*) の線形化作用素も負の固有値をもち，単調でない (u^*, v^*) に対して w^* も単調でないので，定理の主張が正しいことがいえる．

(3.37) は次の変分問題の第 1 変分として得られることを思い出そう：

$$\mathcal{E}_a(w) = \int_\Omega \frac{d}{2}|\nabla w|^2 - F(w)\,dx, \quad w \in \{\phi \in H^1(\Omega) : \langle\phi\rangle = m\}$$

ここで $F(w) = \int^w f(w)dw$. この第 2 変分は

$$\mathcal{K}(\varphi) = \int_\Omega d|\nabla\varphi|^2 - f(w^*)\varphi^2\,dx, \quad \varphi \in \{\phi \in H^1(\Omega) : \langle\phi\rangle = 0\}$$

である．$\mathcal{K}(\phi) < 0$ となる関数が存在することが示せれば十分である．w^* は x_1 軸方向に単調でないので $\Phi := w^*_{x_1}$ は x_1 方向に符号変化する．また，方程式を x_1 で偏微分すれば

$$d\Delta\Phi + f'(w^*)\Phi = 0$$

を満たすが，$\langle\Phi\rangle = 0$ とは限らない．そこで

$$\Phi_+(x) := \frac{1}{2}(\Phi(x) + |\Phi(x)|), \qquad \Phi_-(x) := \frac{1}{2}(\Phi(x) - |\Phi(x)|)$$

を定義する．$\Phi(x) = \Phi_+(x) + \Phi_-(x)$ だが，

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi_+(x) + c\Phi_-(x), \qquad \langle\tilde{\Phi}\rangle = 0$$

となるように c を決める．境界では

$$\Phi(x) = 0 \quad (x \in \{0\}\times D, \{L\}\times D), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad (x \in (0,L)\times\partial D)$$

なので，$\tilde{\Phi}$ および，$\Phi^\dagger := \Phi_+ + c^2\Phi_-$ に対して

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi^\dagger(x) = 0 \quad (x \in \{0\}\times D, \{L\}\times D), \qquad \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial\nu} = 0 \quad (x \in (0,L)\times\partial D).$$

さらに，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}^2 = (\Phi_+ + \Phi_-)(\Phi_+ + c^2\Phi_-) = \Phi\Phi^\dagger, \\
&|\nabla\tilde{\Phi}|^2 = (\nabla\Phi_+ + \nabla\Phi_-)\cdot(\nabla\Phi_+ + c^2\nabla\Phi_-) = \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi^\dagger
\end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\tilde{\Phi}) &= \int_\Omega \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi^\dagger - f'(w^*)\Phi\Phi^\dagger\,dx \\ &= -\int_\Omega (\Delta\Phi + f'(w^*)\Phi)\Phi^\dagger\,dx = 0\end{aligned}$$

この $\tilde{\Phi}$ は Ω 内の零点集合上で滑らかでなくなるので，$\mathcal{K}$ の最小化解とはなり得ない．よって線形化作用素 $\mathcal{L}$ は負の固有値をもつ．

次に，周期境界条件の場合を示そう．$x = x_1$ とおいて

$$\mathcal{K}(\varphi) = \int_0^L d\varphi_x^2 - f'(w^*)\varphi^2 dx, \qquad \varphi \in \{\phi \in H^1_{per}(0,L) :\ \langle\phi\rangle = 0\}$$

$$\mathcal{K}(w_x^*) = 0, \qquad \int_0^L w_x^* dx = 0$$

より，w_x^* は零固有値に対する固有関数になっている．ノイマンのときのようにこの関数を調整することはできないので別な議論が必要である．

$w^*(x)$ が非定数で単峰でなければ，すくなくとも $w_x^*(x)$ は $[0, L)$ において零点を 2 個持つ．この w_x^* は，積分量に関する制限がない固有値問題

$$\mathcal{L}\varphi = -[d\varphi_{xx} + f'(w^*)\varphi]$$

の固有関数でもあるので，スツルム・リュウビルの理論から，この問題の第 1 固有値と第 2 固有値は負になる．それらに対する固有関数を ψ_1, ψ_2 とすると

$$\langle\psi_1 + c\psi_2\rangle = 0$$

となるように c をとることができる．実際，$\langle\psi_2\rangle = 0$ なら $\mathcal{K}(\psi_2) < 0$ により証明は終わる．

$$(\mathcal{L}\psi_1, \psi_2)_{L^2} = (\psi_1, \mathcal{L}\psi_2)_{L^2} = 0$$

に注意すると，

$$\mathcal{K}(\psi_1 + c\psi_2) = \int_0^L d|(\psi_1 + c\psi_2)_x|^2 - f'(w^*)(\psi_1 + c\psi_2)^2\,dx = \mathcal{K}(\psi_1) + c^2\mathcal{K}(\psi_2) < 0.$$

これで証明が終了した．□

注意 14 上の定理の拘束条件がある $\mathcal{L}$ の安定性の議論は，[55] による．[76] にも同様の証明がある．また，周期境界条件の場合は [36] で使われた議論である．

注意 15 [71] や [59] では，具体的な (3.11) の g について, 方程式を周期境界条件のもとでシミュレーションしている．それによると，チューリング不安定性によって生じたパターンは複数のスパイク状のパターンに成長した後，スパイクが少しずつ崩壊していき，ただ一つのスパイクパターンに長時間経た後に落ち着く．なお，$\beta = 0$ の場合にも同様の成り立ち，上の定理は数値計算の結果の数学的正当性を与える．なお，$\beta = 0$ の場合にも同様の結果が成り立つ．

4　固有値のパラメータに関する依存性

この節では以下のような固有値問題を考える．$M(s)$ $(s \geq 0)$ は, 各 s に対して $L^2(\Omega)$ における有界で自己共役な作用素とする．さらに正定値 $M(s) > 0$ $(\forall s \geq 0)$, すなわち
$$(M(s)\phi, \phi)_{L^2} > 0 \qquad (\phi \in L^2(\Omega), \phi \neq 0)$$
を仮定する．この $M(s)$ を用いて $L^2(\Omega)$ の重み付き内積とノルムを
$$(\phi, \tilde{\phi})_s := (M(s)\phi, \tilde{\phi})_{L^2}, \qquad \|\phi\|_s := \sqrt{(\phi, \phi)_s}$$
で定義する．明らかに通常のノルムと同値である．

$A_N = -d\Delta_N$ とし，B を L^2 上の自己共役な有界作用素とすると，$A_N + B$ は自己共役である．$(A_N + B - \omega M(s))^{-1}$ は十分大きい $-\omega > 0$ に対して存在し，コンパクト作用素になっていることを仮定する．

Rayleigh 商 (quotient) を
$$R[\phi; s] := \frac{d\|\nabla\phi\|^2 + (B\phi, \phi)_{L^2}}{\|\phi\|_s^2}$$
で定義する．この変分問題に対応する，Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\phi = \omega M(s)\phi, \qquad \phi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = H_N^2(\Omega), \\ &\mathcal{L} := -d\Delta_N - B \end{aligned} \tag{4.1}$$

各 $s \geq 0$ に対して (4.1) の固有値の集合 $\{\omega_j(s)\}$ を重複度を込めて次のように順序付ける:
$$\omega_1(s) \leq \omega_2(s) \leq \cdots \leq \omega_j(s) \leq \omega_{j+1}(s) \leq \cdots,$$
$\omega_j(s)$ に対応する正規化された固有関数を $\phi_j(\cdot; s)$ とする．すなわち $(\phi_j(\cdot; s), \phi_k(\cdot; s))_s = \delta_{jk}$．

固有値問題 (4.1) に対して Min-Max 原理による特徴付けをまとめておく． $\mathcal{M}^n$ を $L^2(\Omega)$ の n 次元部分空間全体とする，すなわち
$$\mathcal{M}^n = \{X_n \subset L^2(\Omega) : X_n \text{ は } \mathrm{dim} X_n = n \text{ の部分空間}\}.$$
このとき，
$$\omega_n(s) = \inf_{X_n \in \mathcal{M}^n} \sup\{R[\phi; s] : \phi \in X_n,\ \phi \neq 0\}. \tag{4.2}$$
また $\omega_n(s)$ は次のように特徴づけることもできる．
$$\omega_n(s) = \sup_{Z \in \widetilde{M}^{n-1}} \inf\{R[\phi; s] : \phi \in L^2(\Omega), (\phi, \psi)_s = 0\,(\forall\psi \in Z)\}.$$

ここで $\widetilde{M}^{n-1}$ は $L^2(\Omega)$ の $n-1$ 次元以下の部分空間 Z 全体を表す．なお，最も馴染みがあるのは帰納的に固有値を定義する以下の式であろう．

$$\begin{aligned}\omega_n(s) = \inf\{R[\phi; s] : \phi \in L^2(\Omega), \phi \neq 0,\\ (\phi, \phi_j(\cdot, s))_s = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)\}.\end{aligned}$$

上記の 3 つの定義は同値である (文献 [10] 参照).

以下，$M(s)$ $(s \geq 0)$ に次の仮定をする:

(H1) $M(s)$ は s について単調増加，すなわち

$$0 < M(s_2) - M(s_1), \qquad 0 \leq s_1 < s_2$$

が成り立つ.

(H2) $M(s)/s$ は $s > 0$ について単調減少，すなわち，

$$0 < M(s_1)/s_1 - M(s_2)/s_2, \qquad 0 < s_1 < s_2$$

が成り立つ.

(H3) ある正の定数 C_1 と η が存在して

$$\|M(s) - M(0)\|_{op} \leq C_1 s \qquad (0 \leq s \leq \eta)$$

が成り立つ.

次の命題は固有値の s に関する単調性を示す.

命題 4.1 (i) $\omega_n(0) > 0$ の場合

$$\omega_n(s_1) \geq \omega_n(s_2) > 0 \qquad (0 \leq s_1 \leq s_2)$$

が成り立つ.

(ii) $\omega_n(0) < 0$ の場合

$$\omega_n(s_1) \leq \omega_n(s_2) < 0 \qquad (0 \leq s_1 \leq s_2)$$

が成り立つ.

(iii) $\omega_n(0) = 0$ なら $\omega_n(s) = 0$ $(s \geq 0)$ である．また，$\omega_n(s_0) = 0$ なる $s_0 > 0$ が存在すれば $\omega_n(s) = 0$ $(s \geq 0)$ が成り立つ.

次の命題は連続性を保証する.

命題 4.2 (4.1) の各固有値 $\omega_n(s)$ は s について $[0, \infty)$ で連続である.

次に $s=0$ の固有値 $\{\omega_n(0)\}$ と，ウェイトを考えない $\mathcal{L}$ の固有値問題

$$\mathcal{L}\phi = \lambda\phi, \qquad \phi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \tag{4.3}$$

の固有値も比べることができる．次の命題は通常の固有値比較から導かれるので証明は省略する．

命題 4.3 $s=0$ の場合の (4.1) の固有値問題 と (4.3) のそれにおいて，負の固有値の個数は重複度を込めて一致する．また，零固有値が存在する場合，その重複度は一致する．

上記の 2 つの命題 4.1, 4.2 の証明のために補助定理を準備する．

補題 4.4 任意の $\phi \in L^2(\Omega)$ に対して

$$\|\phi\|_{s_1} \le \|\phi\|_{s_2} \qquad (0 \le s_1 \le s_2), \tag{4.4}$$

$$\frac{\|\phi\|_{s_2}^2}{s_2} \le \frac{\|\phi\|_{s_1}^2}{s_1} \quad (0 < s_1 \le s_2), \tag{4.5}$$

かつ

$$\|\phi\|_0^2 \le \|\phi\|_s^2 \le (1 + C_2 s)\|\phi\|_0^2 \qquad (0 \le s \le \eta) \tag{4.6}$$

が成り立つ．

[証明]　仮定 (H1), (H2) より (i) と (ii) は自明である．(iii) は

$$\|\phi\|_s^2 - \|\phi\|_0^2 = ((M(s) - M(0))\phi, \phi)_{L^2}$$

と (H3) より明らか．　□

$$\mathcal{K}[\phi] := d\|\nabla\phi\|^2 + (B\phi, \phi)_{L^2} \qquad (\phi \in H^1(\Omega)) \tag{4.7}$$

とおく．

補題 4.5 $0 \le s_1 \le s_2$ かつ $\omega_n(s_2) > 0$ なら $\omega_n(s_2) \le \omega_n(s_1)$.

[証明]　inf-sup タイプの Min-Max 原理 (4.2) と条件 $\omega_n(s_2) > 0$ より，次のような $\delta > 0$ が存在する:

$$\sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi \in E, \phi \ne 0\right\} \ge \delta \quad (E \in \mathcal{M}^n).$$

仮定から

$$\sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi\in E, \phi\neq 0\right\} = \sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi\in E, \phi\neq 0, \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}.$$

(4.2) より

$$\begin{aligned}\omega_n(s_2) &= \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_2}^2} : \phi\in E, \phi\neq 0\right\}\\ &= \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_2}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0,\ \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}\\ &\leq \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_1}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0,\ \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}\\ &= \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_1}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0\right\} = \omega_n(s_1).\end{aligned}$$

これは目的の不等式である． □

補題 4.6 $0 < s_1 \leq s_2$ かつ $\omega_n(s_1) > 0$ なら $0 < \omega_n(s_1) \leq (s_2/s_1)\omega_n(s_2)$. さらに $\omega_n(0) > 0$ なら

$$0 < \omega_n(0) \leq (1+\eta_{\gamma,\tau}s)\omega_n(s) \quad (0 < s).$$

[証明] (4.2) と $\omega_n(s_1) > 0$ より 次のような $\delta_1 > 0$ が存在する:

$$\sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_1}^2 : \phi\in E, \phi\neq 0\right\} \geq \delta_1 \quad (E\in\mathcal{M}^n).$$

次は明らか：

$$\sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_1}^2 : \phi\in E, \phi\neq 0\right\} = \sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_1}^2 : \phi\in E, \phi\neq 0, \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}.$$

一方，(4.2) と Lemma 4.4 より

$$\begin{aligned}\omega_n(s_1) &= \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_1}^2} : \phi\in E, \phi\neq 0\right\}\\ &= \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_1}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0,\ \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}\\ &\leq \inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{s_2}{s_1}\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_2}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0,\ \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}\\ &\leq \frac{s_2}{s_1}\inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_2}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0, \mathcal{K}[\phi]\geq 0\right\}\\ &= \frac{s_2}{s_1}\inf_{E\in\mathcal{M}^n}\sup\left\{\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_2}^2} : \phi\in E,\ \phi\neq 0\right\} = \frac{s_2}{s_1}\omega_n(s_2).\end{aligned}$$

同様にして $s_1 = 0$ のときは $\mathcal{K}[\phi] > 0$ に対して

$$\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_0^2} \le (1 + C_1 s)\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_s^2} \qquad (s > 0)$$

を使えばよい. こうして証明が完了する． □

次の補題は自明である．

補題 4.7 (4.1) の零固有値に対する固有空間は $s \ge 0$ に依存しない．

次の補題は 補題 4.5, 4.6 と 4.7 から従う．

補題 4.8 もし，ある $s_0 > 0$ に対して $\omega_n(s_0) > 0$ なら，全ての $s \ge 0$ に対して $\omega_n(s) > 0$ である．また，ある $s_0 > 0$ に対して $\omega_n(s_0) < 0$ なら，全ての $s \ge 0$ に対して $\omega_n(s) < 0$ である．

[証明]　最初の主張は補題 4.5 と補題 4.6 から従う. 後半は背理法による. もし，正しくないと仮定すると $\omega_n(s_1) \ge 0$ なる $s_1 > 0$ が存在する．しかし，補題 4.7 より $\omega_n(s_1) = 0$ なら $\omega_n(s) = 0$ $(s \ge 0)$ である. また，$\omega_n(s_1) > 0$ なら $\omega(s) > 0$ $(s \ge 0)$ なので, これは矛盾である． □

次の補題は負の固有値についてパラメータ s に関する大小関係を与える．

補題 4.9 ある $s_0 > 0$ に対して $\omega_n(s_0) < 0$ とすると $0 < s_1 \le s_2$ なら

$$\omega_n(s_1) \le \omega_n(s_2) \le (s_1/s_2)\omega_n(s_1) \tag{4.8}$$

が成り立つ．さらに，$\omega_n(0) < 0$ なら

$$\omega_n(s) \le \frac{1}{1 + \eta_{\gamma,\tau} s}\omega_n(0) \quad (0 < s) \tag{4.9}$$

が成り立つ．

[証明]　補題 4.6 によって, 任意の $s > 0$ に対して $\omega_n(s) < 0$ である. $\omega_n(s_2) < 0$ なので，任意に与えられた $\epsilon \in (0, -\omega_n(s_2))$ に対してある $E_\epsilon \in \mathcal{M}^n$ で次を満たすものが存在する:

$$\sup\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi \in E_\epsilon, \phi \ne 0\} < \omega_n(s_2) + \epsilon.$$

こうして $\phi \in E_\epsilon$ に対して $\mathcal{K}[\phi] < 0$. これと $\|\phi\|_{s_1}^2 \le \|\phi\|_{s_2}^2$ から

$$\begin{aligned}
\omega_n(s_1) &= \inf_{E \in \mathcal{M}^n} \sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_1}^2 : \phi \in E, \phi \ne 0\right\} \\
&\le \sup\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_1}^2 : \phi \in E_\epsilon, \phi \ne 0\} \\
&\le \sup\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi \in E_\epsilon, \phi \ne 0\} < \omega_n(s_2) + \epsilon.
\end{aligned}$$

極限 $\epsilon \downarrow 0$ をとると $\omega_n(s_1) \leq \omega_n(s_2)$.

次に (4.8) の右側の不等式を示す. $\omega_n(s_1) < 0$ だから任意の $\epsilon \in (0, -\omega_n(s_1))$ に対して $E_\epsilon \in \mathcal{M}^n$ で次のものが存在する：

$$\sup\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_1}^2 : \phi \in E_\epsilon, \phi \neq 0\} < \omega_n(s_1) + \epsilon.$$

任意の $\phi \in E_\epsilon$ に対して $\mathcal{K}[\phi] < 0$ と，$1/\|\phi\|_{s_2}^2 \geq (s_1/s_2)(1/\|\phi\|_{s_1}^2)$ から，

$$\begin{aligned}
\omega_n(s_2) &= \inf_{E \in \mathcal{M}^n} \sup\left\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi \in E, \phi \neq 0\right\} \\
&\leq \sup\{\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_{s_2}^2 : \phi \in E_\epsilon, \phi \neq 0\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{s_1}{s_2}\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\|\phi\|_{s_1}^2} : \phi \in E_\epsilon, \phi \neq 0\right\} < \frac{s_1}{s_2}(\omega_n(s_1) + \epsilon).
\end{aligned}$$

極限 $\epsilon \downarrow 0$ をとると $\omega_n(s_2) \leq (s_1/s_2)\omega_n(s_1)$. こうして前半部分が証明できた.

後半は $s_1 = 0$ のとき, $\mathcal{K}[\phi] < 0$ に対して

$$\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_0^2 \leq \mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_s^2 \leq \frac{1}{1 + \eta_{\gamma,\tau} s}\mathcal{K}[\phi]/\|\phi\|_0^2 \qquad (s > 0)$$

が成り立つので，これを使えば前半と同様に証明できる． □

[命題 4.1 と命題 4.2 の証明]: 補題 4.6, 補題 4.7, 補題 4.8，補題 4.9 および 命題 4.1, 命題 4.2 の結果からすぐに従う． □

注意 16 パラメータに関する連続性の議論は文献 [26] でさらに改良され，保存則のある場合に対する固有値比較も見通しよく整理されている．そのおかげで [61] で課されていたパラメータに関する制限は必要でなくなった．

5 Profile of equilibrium solutions

We are concerned with the reaction-diffusion system:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} u_t = d\Delta u - g(u+v) + v, \\ v_t = \Delta v + g(u+v) - v, \end{cases} \qquad x \in \Omega,$$

with the Neumann boundary condition

$$(5.2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$ and $0 < d < 1$. We note that the diffusion coefficients of u and v equations are normalized as 1 in the v-equation and d in the u-equation, that is, d stands for the ratio of the two diffusion coefficients. Here, we deal with the case of the function $g(w)$ given by

$$g(w) = \frac{w}{(w+1)^2}.$$

It is known that there exists a unique nonnegative classical solution satisfying the initial condition

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), \quad u_0, v_0 \in C^0(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0 \ (x \in \overline{\Omega}).$$

Under the evolution of the system, the total mass is conserved:

$$\int_\Omega (u(x,t) + v(x,t))dx = \int_\Omega (u_0(x) + v_0(x_0))dx \qquad (t \geq 0).$$

Moreover, the system allows a Lyapunov function, that is,

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \left\{ \frac{d}{2}|\nabla(u+v)|^2 + (1-d)G(u+v) + \frac{d}{2}(u+v)^2 + \frac{1}{2}|\nabla(du+v)|^2 \right\} dx,$$

where $G(u) := \int_0^w g(u)du$.

Lemma 5.1 *The omega-limit of the orbit of the solution of* (5.1)-(5.2) *consists of equilibrium solutions.*

Proof. By the new variables

$$w = u + v, \qquad z = du + v$$

the system is transformed to

$$(5.3) \qquad \begin{cases} (1+d)w_t - z_t = d\Delta w - (1-d)g(w) - dw + z, \\ \\ w_t = \Delta z. \end{cases}$$

Utilizing

$$\mathcal{L}_1(w,z) = \int_\Omega \left\{ \frac{d}{2}|\nabla w|^2 + (1-d)G(w) + \frac{d}{2}w^2 + \frac{1}{2}|\nabla z|^2 \right\} dx$$

yields

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(w(\cdot,t), z(\cdot,t)) \\
&= \int_\Omega [d\nabla w \cdot \nabla w_t + ((1-d)g(w) + dw)w_t + \nabla z \cdot \nabla z_t\,]dx \\
&= \int_\Omega [(-d\Delta w + (1-d)g(w) + dw)w_t - z_t\Delta z\,]dx \\
&= \int_\Omega [(-w_t + z_t + z)w_t - w_t z_t]\, dx \\
&= \int_\Omega [-(1+d)w_t^2 + zw_t]\, dx = \int_\Omega [-(1+d)w_t^2 + z\Delta z]\, dx \\
&= -\int_\Omega [(1+d)w_t^2 + |\nabla z|^2]\, dx.
\end{aligned}$$

This implies that

$$\text{(5.4)} \qquad \frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(w,z) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad w_t = 0, \quad z(\cdot,t) = \langle z(\cdot,t)\rangle \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

On the other hand, in view of (5.3) we have

$$(1+d)\langle w_t\rangle - \langle z_t\rangle = -(1-d)\langle g(w)\rangle - dm + \langle z\rangle.$$

Applying (5.4) to this equation yields

$$\langle z_t\rangle = (1-d)\langle g(w)\rangle + dm - \langle z\rangle.$$

The uniform boundednes of the solution for all t implies $\langle z_t\rangle = d\langle z\rangle/dt = 0$, hence, $\langle z(\cdot,t)\rangle$ is constant. In the consequence we can assert that

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(w,z) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

is realized by only equilibrium solutions. This yields that the omega-limit set of the solution is contained in a set of equilibrium solutions. $\square$

5.1 Stationary problem

We deal with the stationary problem of (5.1)-(5.2),

$$\text{(5.5)} \qquad \begin{cases} d\Delta u - g(u+v) + v = 0, \\ \Delta v + g(u+v) - v = 0, \end{cases} \qquad x \in \Omega,$$

with the Neumann boundary condition (5.2) and the total mass constraint

$$\int_\Omega (u+v)\,dx = M, \qquad \text{i.e. } \langle u\rangle + \langle v\rangle = M/|\Omega| \equiv m. \tag{5.6}$$

Set $w = u + v$. By a straightforward computation, the system (5.5) is reduced to the scalar equation for $w = u + v$,

$$-d\Delta w + (1-d)g(w) + dw = \lambda \quad (x \in \Omega), \tag{5.7}$$

with the Neumann boundary condition $\partial w/\partial\nu = 0$ on $\partial\Omega$ and the total mass constraint $\int_\Omega w\,dx = M$, where λ is the Lagrange multiplier.

This scalar equation is the Euler-Lagrange equation of the energy functional

$$\mathcal{E}_1(w) = \int_\Omega \left(\frac{d}{2}|\nabla w|^2 + (1-d)G(w) + \frac{d}{2}w^2\right) dx, \tag{5.8}$$

under the total mass constraint (5.6), where the function G is given by

$$G(w) = \int_0^w g(u)\,du = \log|w+1| + \frac{1}{|w+1|} - 1.$$

We focus on positive solutions to the system (5.1) minimizing the corresponding energy functional $\mathcal{E}_1$. We note that the gradient flow is given by the evolutionary equation

$$w_t = d\Delta w - (1-d)g(w) - dw + (1-d)\langle g(w)\rangle + dm \quad (x \in \Omega), \tag{5.9}$$

with the Neumann boundary condition. We easily verify

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(w(\cdot,t)) = -\int_\Omega w_t^2\,dx \le 0.$$

We remark that by the strong maximum principle of parabolic equations we know $w(x,t) > 0$ for initial data $w_0(x) \ge 0, \not\equiv 0$.

We consider the variational problem

$$\inf_{\mathcal{A}} \mathcal{E}(w) = \inf_{\mathcal{A}} \int_\Omega \left(\frac{d}{2}|\nabla w|^2 + (1-d)G(w) + \frac{d}{2}w^2\right) dx, \tag{5.10}$$

subject to an admissible set

$$\mathcal{A} := \{w \in H^1(\Omega) : \int_\Omega w\,dx = M,\ w \ge 0\}.$$

This allows a minimizing sequence in $\mathcal{A}$. We let $\tilde{w}$ be a function which attains the infimum of the energy in the admissible set. By virtue of the mass constrain, $\tilde{w}$ is not identically zero. If it has a zero, then applying the gradient flow takes us to a positive solution for $t > 0$ with less energy than $\tilde{w}$, which yields a contradiction. Hence $\tilde{w}$ is a positive minimizer in $\mathcal{A}$ and satisfies the Euler-Lagrange equation (5.7).

We have the next property of any positive solution (5.7).

Lemma 5.2 *Let $w^*(x)$ be a positive solution to* (5.7). *Then*

$$dw^*(x) < \lambda < w^*(x) \qquad (x \in \overline{\Omega})$$

holds, where λ is the Lagrange multiplier of (5.7) *for $w^*(x)$.*

Proof. Let

$$w^*(x_m) = \min_{x \in \overline{\Omega}} w^*(x), \qquad w^*(x_M) = \max_{x \in \overline{\Omega}} w^*(x).$$

By (5.7) we have

$$\begin{aligned} 0 &\le \Delta w^*(x_m) = (1-d)g(w^*(x_m)) + dw^*(x_m) - \lambda \\ &< (1-d)w^*(x_m) + dw^*(x_m) - \lambda = w^*(x_m) - \lambda, \end{aligned}$$

while

$$(1-d)g(w^*(x_M)) + dw^*(x_M) - \lambda = \Delta w^*(x_M) \le 0,$$

which implies

$$0 < (1-d)g(w^*(x_M)) \le \lambda - dw^*(x_M).$$

Hence, we obtain

$$dw^*(x_M) < \lambda < w^*(x_m).$$

This concludes the proof. $\square$

By this lemma we obtain one-to-one correspondence between positive solution (5.7) and (5.5) with the Neumann conditions by

$$u^*(x) = \frac{1}{1-d}(w^*(x) - \lambda) = \frac{1}{1-d}(w^*(x) - z^*(x)), \tag{5.11}$$

$$v^*(x) = \frac{1}{1-d}(\lambda - dw^*(x)) = \frac{1}{1-d}(z^*(x) - dw^*(x)). \tag{5.12}$$

In addtiion, we see

$$\mathcal{L}(u^*, v^*) = \mathcal{L}_1(w^*, z^*) = \mathcal{E}_1(w^*).$$

We obtain:

Lemma 5.3 *Let (u^*, v^*) be a positive solution which minimize the functional $\mathcal{L}$. in $\mathcal{A}_2 := \{(u,v) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : u > 0, v > 0,\ \langle u \rangle + \langle v \rangle = m\}$. Then $w^* = du^* + v^*$ is a positive minimizer of $\mathcal{E}_1$ in $\mathcal{A}$. On the other hand if w^* is a positive minimizer of $\mathcal{E}_1$ in $\mathcal{A}$, then (u^*, v^*) defined by* (5.11)-(5.12) *attains the infmum of $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}_2$*

6 Profile of the minimizer

In this section we first provide some qualitative aspect of the profile for the minimizer of $\mathcal{E}_1(w)$ of (5.8) in specific domains, an interval and a rectangle. Then we investigate the asymptotic profile of the minimizer in the interval as $d = \varepsilon^2 \to 0$.

6.1 Monotonicity of minimizers

In view of the work by Gurtin-Matano [55] we have

Lemma 6.1 *Consider a minimizer of $\mathcal{E}_1(w)$ of (5.8) in a cylindrical domain*

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < L, \quad y \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}\},$$

where D is a bounded domain with the smooth boundary ∂D. Then the minimizer is monotone in the axial direction, that is, constant or strictly monotone in x-axis.

Since the constant solution cannot be minimizer for small d, we have the next result.

Lemma 6.2 *Let $\Omega = (0, 1)$. Then there is $d_c > 0$ such that the minimizer of $\mathcal{E}_1(w)$ is strictly monotone if $d < d_c$.*

In addition in a rectangle domain we have

Lemma 6.3 *Let $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, \ 0 < y < L\}$ and consider the minimizer of $\mathcal{E}_1$ in this domain. Assume $d < d_c$. Then there is $L_c > 0$ such that the minimizer is strictly monotone in both x and y axes.*

This lemma implies that only corners of the domain allows the maximum and the minimum of the minimizer if the rectangle is sufficiently fat .

6.2 Asymptotic profile of minimizers

We investigate the asymptotic behavior of the minimizer of (5.10) as $d = \varepsilon^2 \to 0$ ($\varepsilon > 0$) when the domain is a one-dimensional interval $\Omega = (0, 1)$. The corresponding Euler-Lagrange equation is given by

$$(6.1) \qquad \begin{aligned} &-\varepsilon^2 w_{xx} + (1 - \varepsilon^2) g(w) + \varepsilon^2 w = \lambda \ \ (0 < x < 1), \\ &w_x(0) = w_x(1) = 0, \end{aligned}$$

with

$$(6.2) \qquad \int_0^1 w \, dx = M.$$

We introduce a key scaling parameter. Let $\kappa = \kappa_\varepsilon$ be a positive solution of the equation

$$\varepsilon^2 = \frac{\log \kappa}{\kappa^4}. \tag{6.3}$$

It is seen that there is an interval $(0, \varepsilon_1)$ in which κ_ϵ is strictly decreasing and that $\lim_{\varepsilon \to 0+} \kappa_\varepsilon = +\infty$. We note that from (6.3)

$$\varepsilon \kappa_\varepsilon \sqrt{\log \kappa_\varepsilon} = \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \tag{6.4}$$

follows.

Suppose that w_ε is a global minimizer of the functional

$$\mathcal{E}_\varepsilon(w) = \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} w_x^2 + (1-\varepsilon^2) G(w) + \frac{\varepsilon^2}{2} w^2 \right) dx, \tag{6.5}$$

in the admissible set $\mathcal{A}$. Without loss generality, we may assume that w_ε is monotone decreasing.

Theorem 6.4 ([7]) *Let κ_ε be the solution of* (6.3) *and the function w_ε be a minimizer of the functional* (6.5). *Assume w_ε to be decreasing.Then the following propertirs hold:*

(i) *The sequence $\{w_\varepsilon\}$ converges to $M\delta(x)$ in the following sense:*

$$\int_0^1 w_\varepsilon(x) dx = M, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\eta \le x \le 1} w_\varepsilon(x) = 0 \quad (\forall \eta \in (0,1)),$$

where $\delta(x)$ is the Dirac delta function.

(ii) *Set $\mu_\varepsilon := \max_{0 \le x \le 1} w_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(0)$. There exist constants $0 < C_1' < C_1$ and $\varepsilon_1 > 0$ such that*

$$C_1' \le \frac{\mu_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \le C_1 \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_1).$$

(iii) *Define $W_\varepsilon(x) := \frac{1}{\kappa_\varepsilon} w_\varepsilon \left(\frac{x}{\kappa_\varepsilon} \right)$. The sequence $\{W_\varepsilon\}$ converges to a function*

$$W_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{ax^2}{4} & (0 < x < \frac{\sqrt{2}}{a}), \\ 0 & (\frac{\sqrt{2}}{a} \le x) \end{cases}$$

in $C^{0,\alpha}_{loc}$ $(0 \le \alpha < 1)$, where $a = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3M}}$. Furthermore,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} = \frac{1}{a}. \tag{6.6}$$

The following Corollary immediately follows:

Corollary 6.5 *Let w_ε be a minimizer of the functional* (6.5) *and $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ be the associative solution to the system* (5.5) *through the relation* (5.11)-(5.12). *Then the sequence $\{u_\varepsilon\}$ converges to $M\delta(x)$ in the same sense describing in Theorem 6.4 (i) and the sequence $\{v_\varepsilon\}$ converges to 0 in $L^\infty(0,1)$.*

6.3 Proof of (i) and (ii) of Theorem 2.2

We define

$$\phi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 2M\kappa(1-\kappa x) & (0 \le x \le 1/\kappa), \\ 0 & (1/\kappa \le x \le 1). \end{cases}$$

Lemma 6.6 *There are constants $C_0 > 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ such that*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \le C_0 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon \le \varepsilon_0). \tag{6.7}$$

Proof. We simply write κ instead of κ_ε below. Plugging the test function in the functional, we compute the energy term-by-term:

$$\int_0^1 \{(\phi_\varepsilon)_x\}^2 dx = \int_0^{1/\kappa} \left(2M\kappa^2\right)^2 dx = 4M^2\kappa^3,$$
$$\int_0^1 (\phi_\varepsilon)^2 dx = \int_0^{1/\kappa} 4M^2\kappa^2(1-\kappa x)^2 dx = \frac{4}{3}M^2\kappa,$$
$$\int_0^1 \log(\phi_\varepsilon + 1) dx = \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{2M\kappa^2}\right) \log\left(2M\kappa + 1\right) - \frac{1}{\kappa},$$

and

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\phi_\varepsilon + 1} - 1\right) dx = \frac{1}{2M\kappa^2} \log(2M\kappa + 1) - \frac{1}{\kappa}.$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) &= 2M^2\varepsilon^2\kappa^3 + (1-\varepsilon^2)\left[\left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{2M\kappa^2}\right)\log\left(2M\kappa+1\right) - \frac{1}{\kappa}\right] \\ &\quad + (1-\varepsilon^2)\left[\frac{1}{2M\kappa^2}\log(2M\kappa+1) - \frac{1}{\kappa}\right] + \frac{2}{3}M\varepsilon^2\kappa. \end{aligned}$$

Since the definition of $\kappa = \kappa_\varepsilon$, we see $\varepsilon^2\kappa^3 = \log\kappa/\kappa$, which implies the desired inequality (6.7). □

From the above lemma we see that the minimizer converges to zero almost everywhere as $\varepsilon \to 0$. In addition we have the next lemma.

Lemma 6.7 *Let μ_ε be the one defined in (ii) Theorem 6.4 .*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mu_\varepsilon = +\infty.$$

Proof. We will prove by contradiction. Assume that there exists some sequence $\{\varepsilon_j\}$ converging to 0 and some constant $C > 0$ such that $\mu_{\varepsilon_j} \le C$ for all j. Choose a point $w_0 < M$ sufficiently small in an open interval $(0, 1)$ such that the intersection of the tangent line

$$y = G'(w_0)(w - w_0) + G(w_0),$$

and the graph $y = G(w)$ is achieved at the point $w = w_0$ and $w_1 > C$. Note that

$$G'(w_0) = \frac{G(w_1) - G(w_0)}{w_1 - w_0}.$$

Noticing that $y = G(w)$ is convex up to $w = 1$ and concave for $w > 1$, and invoking of the L^∞-boundedness of the sequence $\{w_{\varepsilon_j}\}$, we see

$$G(w_{\varepsilon_j}) \geq G'(w_0)(w_{\varepsilon_j} - w_0) + G(w_0).$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(w_{\varepsilon_j}) = &\int_0^1 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \left| \frac{dw_{\varepsilon_j}}{dx} \right|^2 + (1 - \varepsilon_j^2) G(w_{\varepsilon_j}) + \frac{\varepsilon^2}{2} w_{\varepsilon_j}^2 \right) dx \\
\geq &(1 - \varepsilon_{\varepsilon_j}^2) \int_0^1 \left(G'(w_0)(w_{\varepsilon_j} - w_0) + G(w_0) \right) dx \\
> &\frac{1}{2} \left(G'(w_0)(M - w_0) + G(w_0) \right) > 0
\end{aligned}$$

for ε_j small enough. The constant lower bound of the energy $\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(w_{\varepsilon_j})$ contradict to the result of the previous Lemma 6.6:

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(w_{\varepsilon_j}) \leq \frac{C_0 \log \kappa(\varepsilon_j)}{\kappa(\varepsilon_j)} \to 0.$$

This implies

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mu_\varepsilon = +\infty.$$

□

By the above lemma and the monotonicity of the minimizer we can assert (i) of Theorem 6.4. In order to prove (ii) of Theorem 6.4 we prepare several lemmas.

Lemma 6.8 *For the same μ_ε in Lemma 6.7*

$$\frac{1}{2}\, \varepsilon \mu_\varepsilon \sqrt{(1 - \varepsilon^2) \log \mu_\varepsilon} \leq \mathcal{E}_\varepsilon(w_\varepsilon) \tag{6.8}$$

holds.

Proof. Without loss of generality, we may assume $w_\varepsilon(x)$ is strictly monotone decreasing. Indeed, the constant solution $w = M$ of (6.1) cannot be the minimizer because of Lemma 6.6. Thus, we have $\mu_\varepsilon = w_\varepsilon(0)$. Let $\xi = \xi_\varepsilon$ be the point such that

$$\frac{\mu_\varepsilon}{2} = w_\varepsilon(\xi).$$

Put $\varphi_\varepsilon(x) := w_\varepsilon(x)/\mu_\varepsilon$. We have $\varphi_\varepsilon(0) = 1, \varphi_\varepsilon(\xi_\varepsilon) = 1/2$ and

$$\sigma_\varepsilon := \mathcal{E}_\varepsilon(w_\varepsilon) = \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon^2\mu_\varepsilon^2}{2}\{(\varphi_\varepsilon)_x\}^2 + (1-\varepsilon^2)G(\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2\mu_\varepsilon^2}{2}\varphi_\varepsilon^2 \right) dx$$

where

$$G(\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon) = \log(\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon+1) + \frac{1}{\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon+1} - 1 = \frac{\log\mu_\varepsilon}{2} + \log(\sqrt{\mu_\varepsilon}\varphi_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}}) + \frac{1}{\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon+1} - 1,$$

Because $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon = +\infty$ and the definition ξ_ε, we have

$$\log(\sqrt{\mu_\varepsilon}\varphi_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}}) + \frac{1}{\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon+1} - 1 \geq \log(\frac{\sqrt{\mu_\varepsilon}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}}) + \frac{1}{\mu_\varepsilon+1} - 1 > 0,$$

on the interval $[0, \xi_\varepsilon]$. Thus,

$$G(\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon) \;\geq\; \frac{1}{2}\log\mu_\varepsilon \quad (0 \leq x \leq \xi_\varepsilon),$$

for small ε. Utilizing this, we estimate

$$\begin{aligned}
\sigma_\varepsilon &\geq \int_0^{\xi_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2\mu_\varepsilon^2\{(\varphi_\varepsilon)_x\}^2}{2} + (1-\varepsilon^2)G(\mu_\varepsilon\varphi_\varepsilon)\,dx \\
&\geq \int_0^{\xi_\varepsilon} \frac{\{\varepsilon\mu_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)_x\}^2}{2} + \frac{1-\varepsilon^2}{2}\left(\sqrt{\log\mu_\varepsilon}\right)^2\,dx \\
&\geq \int_0^{\xi_\varepsilon} \varepsilon\mu_\varepsilon\sqrt{(1-\varepsilon^2)\log\mu_\varepsilon}|(\varphi_\varepsilon)_x|\,dx \qquad (\text{put } z = \varphi_x(x)) \\
&= \varepsilon\mu_\varepsilon\sqrt{(1-\varepsilon^2)\log\mu_\varepsilon}\int_1^{1/2}(-1)dz = \frac{1}{2}\varepsilon\mu_\varepsilon\sqrt{(1-\varepsilon^2)\log\mu_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

This proves the desired result. $\square$

Lemma 6.9 *There exists $C_1 > 0$ such that $\mu_\varepsilon \leq C_1\kappa_\varepsilon$ for small $\varepsilon > 0$.*

Proof. Combining Lemmas 6.6 and 6.8, we obtain

$$\frac{\varepsilon\mu_\varepsilon}{3}\sqrt{\log\mu_\varepsilon} \leq \mathcal{E}_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq \frac{C_0\log\kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} = C_0\varepsilon\kappa_\varepsilon\sqrt{\log(\kappa_\varepsilon)}, \tag{6.9}$$

where we used (6.4). Furthermore,

$$\begin{aligned}
3C_0\kappa_\varepsilon\sqrt{\log(\kappa_\varepsilon)} &= 3C_0\kappa_\varepsilon\sqrt{\log(3C_0\kappa_\varepsilon) - \log(3C_0)} \\
&\leq 3C_0\kappa_\varepsilon\sqrt{\log(3C_0\kappa_\varepsilon)},
\end{aligned}$$

for ε small enough. Utilysing the fact that the function $x(\log x)^{1/2}$ is monotone increasing for large $x > 0$, we conclude that $\mu_\varepsilon \leq 3C_0\kappa_\varepsilon$. $\square$

By virtue of Lemma 6.9 we proved the half part of the assertion in (ii) of Theorem 6.4. We go to the other part.

Lemma 6.10

$$\gamma_\varepsilon := w_\varepsilon(1) = O\left(\sqrt{\frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}}\right). \tag{6.10}$$

Proof. We notice

$$(1-\varepsilon^2)G(\gamma_\varepsilon) \leq \mathcal{E}_1(w_\varepsilon) \leq C_0\frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}$$

and

$$G(\gamma_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon^2 \int_0^1 (1-\tau)G''(\tau\gamma_\varepsilon)d\tau = \gamma_\varepsilon^2 \int_0^1 (1-\tau)g'(\tau\gamma_\varepsilon)d\tau.$$

By virtue of $g'(0) = 1$, $\int_0^1 (1-\tau)g'(\tau\gamma_\varepsilon)d\tau$ is bounded away from zero for small $\varepsilon > 0$. Combining these facts yields the desired assertion. $\square$

As seen in (6.9),

$$\varepsilon\mu_\varepsilon\sqrt{\log \mu_\varepsilon} \leq \frac{3C_0 \log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}$$

holds. Moreover, we obtain

Lemma 6.11 *There is a positive constant C_2 such that*

$$C_2\frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \leq \frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}$$

holds for small $\varepsilon > 0$.

Proof. The function $\log x/x$ is strictly monotone decreasing in (e, ∞). By $\mu_\varepsilon \leq C_1\kappa_\varepsilon$ of Lemma 6.9,

$$\frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \geq \frac{\log(C_1\kappa_\varepsilon)}{C_1\kappa_\varepsilon} = \frac{1}{C_1}(\log \kappa_\varepsilon/\kappa_\varepsilon + \log C_1/\kappa_\varepsilon).$$

Thus for small $\varepsilon > 0$ there is $C_3 > 0$ which allows the desired inequality. $\square$

We rewrite the equation (6.1) as

$$\frac{\varepsilon^2}{2}w_x^2 = (1-\varepsilon^2)G(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}w^2 - (\lambda_\varepsilon w + A_\varepsilon). \tag{6.11}$$

where $w = w_\varepsilon$, λ_ε is the Lagrange multiplier for w_ε and A_ε is a constant determined by the boundary values. Recall $\mu_\varepsilon = w_\varepsilon(0)$ and $\gamma_\varepsilon = w_\varepsilon(1)$. We notice that $\mu_\varepsilon, \gamma_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$ and A_ε satisfy

$$(1-\varepsilon^2)G(\mu_\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mu_\varepsilon^2 = \lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon + A_\varepsilon. \tag{6.12}$$

$$(1-\varepsilon^2)G(\gamma_\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}\gamma_\varepsilon^2 = \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon + A_\varepsilon. \tag{6.13}$$

Lemma 6.12 *There are positive constants C_3, C_4 and C_5 such that*

$$C_4 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \leq \lambda_\varepsilon \leq C_3 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}, \tag{6.14}$$

$$|A_\varepsilon| \leq C_5 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}. \tag{6.15}$$

hold for small $\varepsilon > 0$.

Proof. First, invoking of (6.11), we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varepsilon(w) &= \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} w_x^2 + (1-\varepsilon^2)G(w) + \frac{\varepsilon^2}{2} w^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 [2(1-\varepsilon^2)G(w) + \varepsilon^2 w^2 - (\lambda_\varepsilon w + A_\varepsilon)]\, dx \\
&= \int_0^1 [\varepsilon^2 w_x^2 + (\lambda_\varepsilon w + A_\varepsilon)]\, dx \geq \lambda_\varepsilon M + A_\varepsilon.
\end{aligned}$$

for $w = w_\varepsilon$. Hence

$$\lambda_\varepsilon M + A_\varepsilon \leq C_0 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}.$$

On the other hand by (6.12) we have

$$\lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon > -A_\varepsilon.$$

Combining these inequalities yields

$$C_0 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \geq \lambda_\varepsilon M - \lambda_\varepsilon \gamma_\varepsilon = \lambda_\varepsilon (M - \gamma_\varepsilon).$$

Hence $\lambda_\varepsilon \leq C_3 \log \kappa_\varepsilon / \kappa_\varepsilon$ for a positive number C_5.

Next, we use (6.12) and (6.13) to obtain

$$\lambda_\varepsilon = \frac{(1-\varepsilon^2)(G(\mu_\varepsilon) - G(\gamma_\varepsilon)) + (\varepsilon^2/2)(\mu_\varepsilon^2 - \gamma_\varepsilon^2)}{\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon}.$$

Sinece $\gamma_\varepsilon, \varepsilon^2\mu_\varepsilon \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, we have

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \frac{G(\mu_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} \cdot \frac{(1-\varepsilon^2)(1-G(\gamma_\varepsilon)/G(\mu_\varepsilon))}{1-\gamma_\varepsilon/\mu_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2}(\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon) \\
&\approx \frac{G(\mu_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} \approx \frac{\log(1+\mu_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} \approx \frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Applying Lemma 6.11 to this inequality yields

$$\lambda_\varepsilon \geq \tilde{C}\frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \geq C_4 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \quad (C_4 = \tilde{C}C_2).$$

In the consequence we obtain (6.14).

In order to obtain (6.15) we apply (6.14) to

$$-\lambda_\varepsilon \leq A_\varepsilon \leq C_0 \frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon}.$$

This conclude the proof. $\square$

By (6.16) we have

Lemma 6.13 *There are positive constants C_6 and C_7 such that*

$$C_7 \frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \leq \lambda_\varepsilon \leq C_6 \frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}$$

holds.

The next lemma completes the proof of Theorem 6.4.

Lemma 6.14 *There is a positive constant C_8 such that*

$$\kappa_\varepsilon \leq C_8 \mu_\varepsilon$$

Proof. Combining (6.14) and Lemma 6.13 leads us to

$$\begin{aligned}
\frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \leq \frac{\lambda_\varepsilon}{C_7} &\leq \frac{C_5}{C_7}\frac{\log \kappa_\varepsilon}{\kappa_\varepsilon} \\
&= \frac{C_5}{C_7}\left(\frac{\log(\kappa_\varepsilon/C_8)}{\kappa_\varepsilon} + \frac{\log C_8}{\kappa_\varepsilon}\right) \\
&= \frac{C5}{C_7 C_8} \cdot \frac{\log(\kappa_\varepsilon/C_8)}{\kappa_\varepsilon/C_8} + \frac{C_5}{C_7}\frac{\log C_8}{\kappa_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Take $C_8 > 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ so that for each $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$

$$\frac{C5}{C_7 C_8} \leq \frac{1}{2}, \qquad \frac{C_5}{C_7}\frac{\log C_8}{\kappa_\varepsilon} \leq \frac{\log(\kappa_\varepsilon/C_8)}{\kappa_\varepsilon/C_8}$$

hold. Then

$$\frac{\log \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \leq \frac{\log(\kappa_\varepsilon/C_8)}{\kappa_\varepsilon/C_8},$$

which implies $\kappa_\varepsilon/C_8 \leq \mu_\varepsilon$ since $\frac{\log x}{x}$ is monotone decreasing for $x > e$. $\square$

7 Proof of (iii) of Theorem 6.4

Since we assume w_ε is a monotone decreasing function, (6.11) reads

$$w_x = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2}\left((1-\varepsilon^2)G(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}w^2 - (\lambda_\varepsilon w + A_\varepsilon)\right)},$$

for $w = w_\varepsilon$, thus

$$x = -\int_{\mu_\varepsilon}^{w} \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2}\left((1-\varepsilon^2)G(\zeta) + \frac{\varepsilon^2}{2}\zeta^2 - (\lambda_\varepsilon \zeta + A_\varepsilon)\right)}}.$$

We have

$$\int_{\gamma_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon} \frac{dw}{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2}\left((1-\varepsilon^2)G(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}w^2 - (\lambda_\varepsilon w + A_\varepsilon)\right)}} = 1, \tag{7.1}$$

$$\int_{\gamma_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon} \frac{w\,dw}{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2}\left((1-\varepsilon^2)G(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}w^2 - (\lambda_\varepsilon w + A_\varepsilon)\right)}} = M. \tag{7.2}$$

Define rescaled functions $W_\varepsilon : \Omega_\varepsilon := (0, \kappa_\varepsilon) \to \mathbb{R}$ by

$$W_\varepsilon(y) = \frac{1}{\kappa_\varepsilon} w_\varepsilon\left(\frac{y}{\kappa_\varepsilon}\right).$$

The equation (6.1) and (6.2) become

$$-W_\varepsilon'' + \frac{(1-\varepsilon^2)}{\log\kappa_\varepsilon}\frac{\kappa_\varepsilon^2 W_\varepsilon}{(\kappa_\varepsilon W_\varepsilon + 1)^2} + \frac{1}{\kappa_\varepsilon^2}W_\varepsilon = \frac{\kappa_\varepsilon\lambda_\varepsilon}{\log\kappa_\varepsilon} \qquad \text{on } \Omega_\varepsilon, \tag{7.3}$$

$$W_\varepsilon'(0) = W_\varepsilon'(\kappa_\varepsilon) = 0,$$

$$\int_0^{\kappa_\varepsilon} W(y)\,dy = M. \tag{7.4}$$

By the integration (7.3) is written as

$$\begin{aligned}(W_\varepsilon'(y))^2 = & \frac{2}{\log\kappa_\varepsilon}\Bigg[(1-\varepsilon^2)\left(\log(\kappa_\varepsilon W_\varepsilon + 1) + \frac{1}{\kappa_\varepsilon W_\varepsilon + 1} - 1\right) \\ & + \frac{\varepsilon^2\kappa_\varepsilon^2}{2}W_\varepsilon^2 - (\lambda_\varepsilon\kappa_\varepsilon W_\varepsilon + A_\varepsilon)\Bigg],\end{aligned} \tag{7.5}$$

in the interval Ω_ε.

The boundedness of the sequence $\{\mu_\varepsilon/\kappa_\varepsilon\}$ implies that $\{W_\varepsilon\}$ is bounded in L^∞-norm. From (7.5), we also know $\{W_\varepsilon\}$ is bounded in $W^{1,\infty}$. Thus, there exists a subsequence $\{\varepsilon_j\}$ such that $\{W_{\varepsilon_j}\}$ converges to a function W_0 in $C^{0,\alpha}(\Omega')$ on any compact subset $\Omega' \subset (0,\infty)$ for $0 \le \alpha < 1$ and the subsequence $\{\mu_{\varepsilon_j}/\kappa_{\varepsilon_j}\}$ converges to some constant.

Lemma 7.1 *Suppose that w_ε is a minimizer of $\mathcal{E}_\varepsilon(w)$ in $\mathcal{A}$. Then there exists a subsequence $\{W_{\varepsilon_j}\}$ and a function $W_0 \in C^{0,\alpha}_{loc}$ such that the subsequence W_{ε_j} converges to W_0 in $C^{0,\alpha}_{loc}$ where $\alpha \in [0,1)$.*

The next two lemmas are crucial to identify the asymptotic profile of the minimizer as $\varepsilon \to 0$.

Lemma 7.2 *Suppose $W_{\varepsilon_j} \to W_0$ in $C^{0,\alpha}_{loc}$. For any $y \in supp(W_0)$, we have*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log(\kappa_{\varepsilon_j} W_{\varepsilon_j}(y)+1)}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} = 1.$$

Proof. For $y \in \mathrm{supp}(W_0)$, we have

$$\frac{\log(\kappa_{\varepsilon_j} W_{\varepsilon_j}(y)+1)}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} - \frac{\log(\kappa_{\varepsilon_j} W_0(y)+1)}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} = \frac{\log\left(1+\frac{W_{\varepsilon_j}(y)-W_0(y)}{W_0(y)+\frac{1}{\kappa_{\varepsilon_j}}}\right)}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} \to 0$$

and

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log(\kappa_{\varepsilon_j} W_0(y)+1)}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} = \lim_{j\to\infty} \frac{\log \kappa_{\varepsilon_j} + \log(W_0(y)+\frac{1}{\kappa_{\varepsilon_j}})}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} = 1.$$

□

Lemma 7.3 *Let $\{\varepsilon_j\}$ be an infinite sequence which satisfies $\varepsilon_j \to 0$ as $j \to \infty$ and*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\lambda_{\varepsilon_j}\kappa_{\varepsilon_j}}{\log \kappa_{\varepsilon_j}} = a, \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{\mu_{\varepsilon_j}}{\kappa_{\varepsilon_j}} = \tilde{\alpha}. \tag{7.6}$$

Then

$$M = \lim_{j\to\infty} \int_0^{\kappa_{\varepsilon_j}} W_{\varepsilon_j}(y)dy = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{\tilde{\alpha}}}{\sqrt{a}}$$

holds.

Lemma 7.4 *The limiting function $W_0(y)$ has a compact support in $[0,\infty)$.*

We prove these two lemmas in the next subsections.

We rewrite (7.5) as

$$W'_\varepsilon(y) = -\left\{\frac{2}{\log \kappa_\varepsilon}\left[(1-\varepsilon^2)\left(\log(\kappa_\varepsilon W_\varepsilon+1)+\frac{1}{\kappa_\varepsilon W_\varepsilon+1}-1\right)+\frac{\varepsilon^2\kappa_\varepsilon^2}{2}W_\varepsilon^2-(\lambda_\varepsilon\kappa_\varepsilon W_\varepsilon+A_\varepsilon)\right]\right\}^{1/2}.$$

Using $\{W_\varepsilon\}$ converges to W_0 in $W^{1,p}_{loc}(0,\infty)$, Lemma 7.4 and the above estimates together with (ii) of Theorem 6.4 and (6.14), we find that the limiting function W_0 should satisfies the equation

$$W' = -\left(2\chi_{\mathrm{supp}(W_0)} - 2a\,W\right)^{1/2} \tag{7.7}$$

where $a = \lim_{j\to\infty}(\lambda_{\varepsilon_j}\kappa_{\varepsilon_j})/\log\lambda_{\varepsilon_j}$. We solve this equation. By $W'(0) = 0$, we have $W(0) = 1/a$, that is, $\tilde{\alpha} = 1/a$. Integrating

$$\int_{1/a}^{W} \frac{dW}{\sqrt{1-aW}} = -\sqrt{2}\int_0^y dy$$

yields

$$\Big[-\frac{2}{a}(1-az)^{1/2}\Big]_{1/a}^{W} = -\frac{2}{a}(1-aW)^{1/2} = -\sqrt{2}y,$$

from which

$$(1-aW)^{1/2} = \frac{a}{2}y.$$

Consequently, we obtain

$$W_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{ay^2}{2} & \text{for } 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{a}, \\ 0 & \text{for } \frac{\sqrt{2}}{a} \le y. \end{cases} \tag{7.8}$$

In view of Lemma 7.3 we compute

$$\int_0^{\sqrt{2}/a} W_0(y)dy = \frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{2}{3} = M.$$

Hence, $a^2 = 2\sqrt{2}/3M$. Since the constant a is independent of the choice of the subsequence $\{\varepsilon_j\}$, the whole sequence $\{W_\varepsilon\}$ converges to W_0 in $C^{0,\alpha}_{loc}$ for $0 \le \alpha < 1$ and $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon/\kappa_\varepsilon = 1/a$. This completes the proof of Theorem 6.4.

7.1 Proof of Lemma 7.3

Although the mass constraint (7.4) holds for any $\varepsilon > 0$, it is not guaranteed that $M = \int_0^\infty W_0(x)\,dx$ holds. The reason is that the convergence $W_{\varepsilon_j}(x)$ to $W_0(x)$ is only locally uniform in $C^{0,\alpha}$ for $0 \le \alpha < 1$. We compute the limit $\int_0^{\kappa_{\varepsilon_j}} W_{\varepsilon_j}(x)dx$ below. Apply the change of the independent valuable x by $z = w_\varepsilon(x)$, we have

$$M = \int_0^1 w_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\gamma_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}}\,dz,$$

where

$$\Phi_\varepsilon(z) = (1-\varepsilon^2)G(z) + \frac{\varepsilon^2}{2}z^2 - \lambda_\varepsilon z - A_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon := w_\varepsilon(1)$$

(recall $\mu_\varepsilon = w_\varepsilon(0)$). We note

$$\Phi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = \Phi(\mu_\varepsilon) = 0.$$

Moreover, $G(x)$ is a monotone increasing and

$$G''(z) = g'(z) > 0 \quad (0 \le z < 1), \qquad G''(z) < 0 \quad (1 < z).$$

Hence,

$$\frac{G(z) - G(\gamma_\varepsilon)}{z - \gamma_\varepsilon} \quad (z \in (\gamma_\varepsilon, 1]), \qquad \frac{G(\mu_\varepsilon) - G(z)}{\mu_\varepsilon - z} \quad (z \in [1, \mu_\varepsilon))$$

are monotone increasing and decreasing respectively.

We define

$$\beta_\varepsilon := \kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon}, \qquad \theta_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\log \kappa_\varepsilon}} \tag{7.9}$$

We remark that as seen in the proof below it suffices to take θ_ε such that

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \theta_\varepsilon = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon} = \infty.$$

Lemma 7.5 *For β_ε defined in* (7.9),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}} dz = 0$$

holds.

Proof. We first show

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon}^{1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}} dz = 0. \tag{7.10}$$

By $\Phi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = 0$, we write

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon(z) &= (1-\varepsilon^2)(G(z) - G(\gamma_\varepsilon)) + \frac{\varepsilon^2}{2}(z^2 - \gamma_\varepsilon^2) - \lambda_\varepsilon(z - \gamma_\varepsilon) \\
&= (z - \gamma_\varepsilon)h_\varepsilon(z), \\
h_\varepsilon(z) &:= (1-\varepsilon^2)\frac{G(z) - G(\gamma_\varepsilon)}{z - \gamma_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2}(z + \gamma_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon,
\end{aligned}$$

where $h_\varepsilon(z)$ can be continuously extended up to $z = \gamma_\varepsilon$ as $h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)g(\gamma_\varepsilon) + \varepsilon^2\gamma_\varepsilon - \lambda_\varepsilon$. Since $h_\varepsilon(z)$ is monotone increasing in $[\gamma_\varepsilon, 1]$, we have

$$\int_{\gamma_\varepsilon}^1 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}} dz \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon(\gamma_\varepsilon)}} \int_{\gamma_\varepsilon}^1 \frac{z}{\sqrt{z-\gamma_\varepsilon}} dz.$$

Invoking of $\gamma_\varepsilon = O(\sqrt{\log \kappa_\varepsilon / \kappa_\varepsilon})$, we can conclude (7.10).

We next deal with the integral over the range $[1, \beta_\varepsilon]$, i.e.,

$$I_\varepsilon := \int_1^{\beta_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}} dz.$$

By the change of the valuable $z = \kappa_\varepsilon \zeta$ in the integral we obtain

$$I_\varepsilon = \int_{1/\kappa_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon/\kappa_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon \kappa_\varepsilon^2 \zeta}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(\kappa_\varepsilon \zeta)}} d\zeta = \int_{1/\kappa_\varepsilon}^{1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\zeta}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(\kappa_\varepsilon\zeta)/\log \kappa_\varepsilon}} d\zeta,$$

where we used $\varepsilon\kappa_\varepsilon^2 = \sqrt{\log \kappa_\varepsilon}$. Recall $\Phi_\varepsilon(\mu_\varepsilon) = 0$ and put $\alpha_\varepsilon := \mu_\varepsilon/\kappa_\varepsilon$. Then

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varepsilon(\kappa_\varepsilon\zeta) = (\alpha_\varepsilon - \zeta) q_\varepsilon(\zeta), \\
&q_\varepsilon(\zeta) := -(1-\varepsilon^2) \frac{G(\kappa_\varepsilon \alpha_\varepsilon) - G(\kappa_\varepsilon \zeta)}{\alpha_\varepsilon - \zeta} - \frac{\varepsilon^2 \kappa_\varepsilon^2}{2}(\zeta + \alpha_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon \kappa_\varepsilon
\end{aligned}$$

For $\zeta \in [1/\kappa_\varepsilon, \beta_\varepsilon/\kappa_\varepsilon] = [1/\kappa_\varepsilon, 1/\kappa^{\theta_\varepsilon}]$,

$$q_\varepsilon(\zeta) \ge -(1-\varepsilon^2) \frac{G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) - G(1)}{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2\kappa_\varepsilon^2}{2}(1/\kappa^{\theta_\varepsilon} + \alpha_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon \kappa_\varepsilon. \tag{7.11}$$

Recall

$$\lambda_\varepsilon = \frac{(1-\varepsilon^2)(G(\mu_\varepsilon) - G(\gamma_\varepsilon)) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mu_\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\gamma_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon} = \frac{(G(\mu_\varepsilon) - G(\gamma_\varepsilon))}{\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon} + O(\varepsilon^2 \mu_\varepsilon).$$

Since $\lambda_\varepsilon\kappa_\varepsilon = O(\log \kappa_\varepsilon)$, it conflict with $G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) = G(\mu_\varepsilon) = O(\log \mu_\varepsilon)$. We should carefully handle the leading terms of the right hand side of (7.11) as

$$\begin{aligned}
&\kappa_\varepsilon \frac{G(\mu_\varepsilon) - G(\gamma_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon} - \frac{G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) - G(1)}{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon} = \kappa_\varepsilon \left\{ \frac{G(\mu_\varepsilon) - G(\gamma_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon} - \frac{G(\mu_\varepsilon) - G(1)}{\mu_\varepsilon - 1} \right\} \\
&= \frac{\kappa_\varepsilon}{(\mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon)(\mu_\varepsilon - 1)} \left\{ -G(\mu_\varepsilon)(1-\gamma_\varepsilon) + (G(1) - G(\gamma_\varepsilon))\mu_\varepsilon + G(\gamma_\varepsilon) - G(1)\gamma_\varepsilon \right\}.
\end{aligned}$$

This term is bounded away from zero as $\varepsilon \to 0$ because of $\kappa_\varepsilon/\mu_\varepsilon = O(1)$, $G(\mu_\varepsilon)/\mu_\varepsilon = O(\log \kappa_\varepsilon/\kappa_\varepsilon)$. Applying this equality to the right hand side of (7.11), we assert that there is $c_1 > 0$ such that

$$q_\varepsilon(\zeta)/\log \kappa_\varepsilon \ge c_1$$

holds for every small $\varepsilon > 0$.

In the sequence we compute

$$\begin{aligned}
&\int_{1/\kappa_\varepsilon}^{1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}} \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha_\varepsilon - \zeta}} d\zeta \\
&= \frac{2}{3}\{(\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})^{3/2} - (\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon)^{3/2}\} - 2\alpha_\varepsilon(\sqrt{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}} - \sqrt{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon}) \\
&\le \frac{2\alpha_\varepsilon(1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon} - 1/\kappa_\varepsilon)}{\sqrt{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}} + \sqrt{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon}} \le \frac{\alpha_\varepsilon/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}{\sqrt{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}}.
\end{aligned}$$

Thus,

$$I_\varepsilon \le \frac{\sqrt{\log \kappa_\varepsilon}}{\sqrt{2c_1}} \int_{1/\kappa_\varepsilon}^{1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}} \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha_\varepsilon - \zeta}} d\zeta = O(\sqrt{\log \kappa_\varepsilon}/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}).$$

Putting $\ell_\varepsilon := \sqrt{\log \kappa_\varepsilon}$ and $\theta_\varepsilon = \ell_\varepsilon^{-1}$, we have

$$\frac{\sqrt{\log \kappa_\varepsilon}}{\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}} = \frac{\ell_\varepsilon}{(e^{\ell_\varepsilon^2})^{\ell_\varepsilon^{-1}}} = \frac{\ell_\varepsilon}{e^{\ell_\varepsilon}}.$$

This implies that $I_\varepsilon \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. $\square$

Lemma 7.6 *Assume* (7.6). *Then*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\beta_{\varepsilon_j}}^{\mu_{\varepsilon_j}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}} dz = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tilde{\alpha}\sqrt{\tilde{\alpha}}}{\sqrt{a}}.$$

Proof. With the same change of variable employed in the previous proof, we have

$$J_\varepsilon := \int_{\beta_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}} dz = \int_{1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}^{\alpha_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha - \zeta}\sqrt{q_\varepsilon(\zeta)/\log \kappa_\varepsilon}} d\zeta,$$

where

$$q_\varepsilon(\zeta) = -(1-\varepsilon^2)\frac{G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) - G(\kappa_\varepsilon\zeta)}{\alpha_\varepsilon - \zeta} - \frac{\varepsilon^2\kappa_\varepsilon^2}{2}(\zeta + \alpha_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon\kappa_\varepsilon.$$

For simplicity of notation we simply take $\varepsilon \to$ instead of $\varepsilon_j \to 0$. For $\zeta \in [1/\kappa^{\theta_\varepsilon}, \alpha_\varepsilon]$,

$$0 < \kappa_\varepsilon g(\mu_\varepsilon) = \kappa_\varepsilon G'(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) \le \frac{G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) - G(\kappa_\varepsilon\zeta)}{\alpha_\varepsilon - \zeta} \le \frac{G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) - G(\kappa^{1-\theta_\varepsilon})}{\alpha_\varepsilon - 1/\kappa^{\theta_\varepsilon}}.$$

We write

$$G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon) - G(\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon}) = \log\frac{\alpha_\varepsilon\kappa_\varepsilon + 1}{\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon} + 1} + \frac{\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon} - \kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon}{(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon + 1)(\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon} + 1)}.$$

By the next estimate

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log\kappa_\varepsilon}\log\frac{\alpha_\varepsilon\kappa_\varepsilon+1}{\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon}+1}&=\frac{1}{\log\kappa_\varepsilon}\log\frac{\alpha_\varepsilon\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+1/\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon}}{1+1/\kappa_\varepsilon^{1-\theta_\varepsilon}}\\&\le\frac{1}{\log\kappa_\varepsilon}\log(\alpha_\varepsilon\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+1)=\theta_\varepsilon+\frac{1}{\log\kappa_\varepsilon}\log(\alpha_\varepsilon+1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}),\end{aligned}$$

with $\theta_\varepsilon\to 0$ as $\varepsilon\to 0$, we obtain

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{G(\kappa_\varepsilon\alpha_\varepsilon)-G(\kappa^{1-\theta_\varepsilon})}{\log\kappa_\varepsilon(\alpha_\varepsilon-1/\kappa^{\theta_\varepsilon})}=0.$$

From this limit and (7.6)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\log\kappa_\varepsilon}q_\varepsilon(\zeta)=a \tag{7.12}$$

follows.

Introducing the new variable $\zeta=1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})\sin^2\phi$ $(0\le\phi\le\pi/2)$ in the integral J_ε, we write

$$\begin{aligned}J_\varepsilon&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{(1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})\sin^2\phi)\cdot 2(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})\sin\phi\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})(1-\sin^2\phi)}\sqrt{q_\varepsilon(1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})\sin^2\phi)/\log\kappa_\varepsilon}}\\&=\sqrt{2(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})}\int_0^{\pi/2}\frac{(1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})\sin^2\phi)\sin\phi\,d\phi}{\sqrt{q_\varepsilon(1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}+(\alpha_\varepsilon-1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon})\sin^2\phi)/\log\kappa_\varepsilon}}.\end{aligned}$$

With the aid of (7.6) and (7.12)

$$\lim_{\varepsilon_j\to 0}J_{\varepsilon_j}=\sqrt{2\tilde\alpha}\int_0^{\pi/2}\frac{\tilde\alpha\sin^3\phi\,d\phi}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2}\tilde\alpha\sqrt{\tilde\alpha}}{\sqrt{a}}\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\tilde\alpha\sqrt{\tilde\alpha}}{\sqrt{a}}.$$

This concludes the proof. □

In conclusion we obtain

$$M=\lim_{j\to\infty}\int_0^{\kappa_{\varepsilon_j}}W_{\varepsilon_j}(y)dy=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\tilde\alpha\sqrt{\tilde\alpha}}{\sqrt{a}}.$$

This conclude the proof of Lemma 7.3.

7.2 Proof of Lemma 7.4

For the solution $w_\varepsilon(x)$ we have the expression as

$$x=\int_w^{\mu_\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{dz}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(z)}}. \tag{7.13}$$

Namely the inverse function of (7.13) gives the solution. Taking the change of variables $z = \kappa_\varepsilon \zeta$, $y = \kappa_\varepsilon x$ and $w = \kappa_\varepsilon W$, we obtain

$$x = y/\kappa_\varepsilon = \int_W^{\mu_\varepsilon/\kappa_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon \kappa_\varepsilon d\zeta}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(\kappa_\varepsilon \zeta)}},$$

hence,

$$y = \int_W^{\mu_\varepsilon/\kappa_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(\kappa_\varepsilon \zeta)/\log \kappa_\varepsilon}}$$

follows and the solution $W_\varepsilon(y)$ is provided by the inverse function of this expression. By choosing β_ε of (7.9), we show

$$y_\varepsilon := \int_{\beta_\varepsilon/\kappa_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon/\kappa_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi_\varepsilon(\kappa_\varepsilon \zeta)/\log \kappa_\varepsilon}} \tag{7.14}$$

is uniformly bounded in ε. In view of

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon/\kappa_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} 1/\kappa_\varepsilon^{\theta_\varepsilon} = 0, \qquad \lim_{j \to \infty} \frac{\mu_{\varepsilon_j}}{\kappa_{\varepsilon_j}} = \tilde{\alpha},$$

we have $a = 1/\alpha$ and

$$\lim_{j \to \infty} y_{\varepsilon_j} = \frac{1}{2} \int_0^{1/a} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - a\zeta}} = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Namely, $W_{\varepsilon_j}(y_{\varepsilon_j}) \to 0$ as $j \to \infty$. Consequently, we can assert that the limiting function $W_0(y)$ has a bounded support.

References

[1] P. W. Bates and P. C. Fife, *Spectral comparison principles for the Cahn-Hilliard and phase-field equations, and time scales for coarsening*, Physica D **43** (1990), 335-348.

[2] G. Caginalp, *An analysis of a phase field model of a free boundary*, Arch. Rational Mech. Anal. **92** (1986), 205-245.

[3] R. G. Casten and C. J. Holland, *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Differential Equations **27** (1978), 266-273.

[4] C.-N. Chen and X. Hu, *Stability criteria for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure*, Comm. Partial Differential Equations, **33** (2008), 189-208.

[5] C.-N. Chen, S. Jimbo and Y. Morita, *Spectral comparison and gradient-like property in the FitzHugh-Nagumo type equations*, accepted by Nonlinearity.

[6] C.-N. Chen, S.-Y. Kung and Y. Morita, *Planar standing wavefronts in FitzHugh-Nagumo equations*, SIAM J.Math. Anal. **46** (2014), 657-690.

[7] J.-L. Chern, Y. Morita and T.-T. Shieh, Asymptotic behavior of equilibrium states of reaction-diffusion systems with mass conservation, J. Differential Equations, **264** (2018), 550-574.

[8] C. Conley and J. Smoller, *Bifurcation and stability of stationary solutions of the FitzHugh-Nagumo equations*, J. Differential Equations, **63** (1986), 389-405.

[9] E. N. Dancer, and S. Yan, *A minimization problem associated with elliptic systems of FitzHugh-Nagumo type*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire, **21** (2004), 237-253.

[10] E. B. Davies, "Spectral Theory and Differential Operators", Cambridge University Press, 1995.

[11] B. Fiedler and C. Rocha, *Heteroclinic orbits of semilinear parabolic equations*, J. Differential Equations, **125** (1996), 239-281.

[12] B. Fiedler and C. Rocha, *Orbit equivalence of global attractors of semilinear parabolic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **352** (2000), 257-284.

[13] G. J. Fix, Phase filed methods for free boundary problems, *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Eds. A. Fasano, M. Primicero, Pitman, London, 1983, 580-589.

[14] P. Freitas and C. Rocha, *Lyapunov functionals and stability for FitzHugh-Nagumo systems*, J. Differential Equations, **169** (2001), 208-227.

[15] M. E. Gurtin and H. Matano, *On the structure of equilibrium phase transitions within of the gradient theory of fluids*, Quart. Appl. Math., **46** (1988) 301-317.

[16] J. K. Hale, "Asymptotic Behavior of Dissipative Systems", Mathematical Surveys and Monographs, no.25, AMS, 1988.

[17] J. K. Hale and J. M. Vegas, *A nonlinear parabolic equations with varying domain*, Arch. Rat. Mech. Anal., **86** (1984), 99-123.

[18] D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations," Springer-Verlag, New York, 1981.

[19] S. Ishihara, M. Otsuji, and A. Mochizuki, *Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems*, Physical Review E, **75** (2007), 015203(R).

[20] S. Jimbo, *Singular perturbation of domains and the semilinear elliptic equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **35** (1988), 27-76.

[21] S. Jimbo, *Singular perturbation of domains and the semilinear elliptic equation II*, J. Differential Equations, **75** (1988), 246-289.

[22] S. Jimbo, *Singular perturbation of domains and semilinear elliptic equation III*, Hokkaido Math. J., **33** (2004), 11-45.

[23] S. Jimbo and Y. Morita, *Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions*, Nonlinear Anal., **22** (1994), 753-770.

[24] S. Jimbo and Y. Morita, *Stable solutions with zeros to the Ginzburg-Landau equation with Neumann boundary condition*, J. Differential Equations, **128** (1996), 596-613.

[25] S. Jimbo and Y. Morita, *Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation*, J. Differential Equations, **255** (2013), 1657-1683.

[26] S. Jimbo and Y. Morita, *Nonlocal eigenvalue problems arising in a generalized phase-field-type system*, Japan J. Indust. Appl. Math. **34** (2017) 555-584.

[27] S. Jimbo, Y. Morita and J. Zhai, *Ginzburg-Landau equation and stable steady state solutions in a non-trivial domain*, Comm. Partial Differential Equations, **20** (1995), 2093-2112.

[28] R. Kohn and P. Sternberg, *Local minimisers and singular perturbations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), 68-84.

[29] H. Kokubu, K. Mischaikow, Y. Nishiura, H. Oka, and T. Takaishi, *Connecting orbit structure of monotone solutions in the shadow system*, J. Differential Equations, **140** (1997), 309-364.

[30] M. Kuwamura and E. Yanagida, *The Eckhaus and zigzag instability criteria in gradient/skew-gradient dissipative systems*, Phys. D, **175** (2003), 185-195.

[31] E. Latos, Y.Morita and T. Suzuki, *Stability and spectral comparison of a reaction-diffusion system with mass conservation*, J. Dyn. Diff. Equat. (2018), inpress.

[32] E. Latos and T. Suzuki, *Global dynamics of a reaction-diffusion system with mass conservation*, J. Math. Anal. Appl., **411** (2014) 107-118.

[33] O. Lopes, *Radial and nonradial minimizers for some radially symmetric functionals*, Electron. J. Differential Equations, **1996**, No.03, 14pp.

[34] H. Matano, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **15** (1979), 401-454.

[35] Y. Morita, *Reaction-Diffusion Systems in Nonconvex Domains: Invariant Manifold and Reduced Form*, J. Dynam. Differential Equations, **2** (1990), 69-115.

[36] Y. Morita, *Spectrum comparison for a conserved reaction-diffusion system with a variational property*, J. Appl. Anal. Computation, **2** (2012), 57-71.

[37] Y. Morita and S. Jimbo, *Ordinary Differential Equations (ODEs) on Inertial Manifolds for Reaction-Diffusion Systems in a Singularly Perturbed Domain with Several Thin Channels*, J. Dynam. Diffrential Equations, **4** (1992), 65-93.

[38] Y. Morita and T. Ogawa, *Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass*, Nonlinearity, **23** (2010), 1387-1411.

[39] 小川知之著,「非線形現象と微分方程式ーパターンダイナミクスの分岐解析ー」, サイエンス社, 2010.

[40] Y. Oshita, *On stable nonconstant stationary solutions and mesoscopic patterns for FitzHugh-Nagumo equations in higher dimensions*, J. Differential Equations, **188** (2003), 110-134.

[41] M. Otsuji, S. Ishihara, C. Co, K. Kaibuchi, A. Mochizuki, and S. Kuroda, *A mass conserved reaction-diffusion system captures properties of cell polarity*, PLoS Computational Biology, **3** (2007), 1040-1054.

[42] X. Ren and J. Wei, *Nucleation in the FitzHugh-Nagumo system: Interface-spike solutions*, J. Differential Equations, **209** (2005), 266-301.

[43] F. Rothe, Global Solutions of Reaction-Diffusion Equations, Lecture Notes in Math., **1072** Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[44] J. Smoller, "Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations", Springer-Verlag, Berlin/New York, 1980. [2nd ed., 1994]

[45] T. Suzuki, "Mean Field Theories and Dual Variation", Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008.

[46] T. Suzuki and S. Tasaki, *Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term*, Nonlinear Anal., **71** (2009) 1329-1349.

[47] R. Temam, "Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics", Springer-Verlag, 1988.

[48] A.M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London B, **237** (1952) 37-72.

[49] J. Wei and M. Winter, *Clustered spots in the FitzHugh-Nagumo system*, J. Differential Equations 213 (2005), 121-145.

[50] E. Yanagida, *Standing pulse solutions in reaction-diffusion systems with skew-gradient structure*, J. Dynam. Differential Equations 14 (2002), 189-205.

[51] E. Yanagida, *Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure*, J. Differential Equations, **179** (2002), 311-335.

[52] 柳田英二著,「反応拡散方程式」, 東京大学出版会, 2015.

[53] S. Boussaïd, D. Hilhorst and T. N. Nguyen, *Convergence to steady state for the solutions of a nonlocal reaction-diffusion equation*, Evol. Equ. and Control Theory, **4** (2015), 39-59.

[54] J. Carr, M. E. Gurtin and M. Slemrod, *Structured phase transitions on a finite interval*, Arch. Rational Mech. Anal., **86** (1984), 317-351.

[55] M. E. Gurtin and H. Matano, *On the structure of equilibrium phase transitions within the gradient theory of fluids*, Quart. Appl. Math. **156** (1988), 301-317.

[56] J. K. Hale, "Asymptotic Behavior of Dissipative Systems", Mathematical Surveys and Monographs, no.25, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[57] M. Herrero and J. Velzquez, *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann. **306** (1996), 583-623.

[58] S.-Z. Huang, "Gradient Inequalities: With applications to asymptotic behavior and stability of gradient-like systems", Mathematical Surveys and Monographs, **126**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[59] S. Ishihara, M. Otsuji, and A. Mochizuki, *Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. E, **75** (2007), 015203(R).

[60] S. Jimbo and Y. Morita, *Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation*, J. Differential Equations, **255** (2013), 1657-1683.

[61] E. Latos, Y. Morita and T. Suzuki, *Stability and spectral comparison of a reaction-diffusion system with mass conservation*, preprint.

[62] E. Latos and T. Suzuki, *Global dynamics of a reaction-diffusion system with mass conservation*, J. Math. Anal. Appl., **411** (2014) 107-118.

[63] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, M. Nagayama and S. Yotsutani, *Global bifurcation sheet and diagrams of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization*, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications AIMS Proceedings, 2015, 861-877.

[64] T.Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, *Exact multiplicity of stationary limiting problem of a cell polarization model*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A, **36** (2016), 5627-5655.

[65] Y. Mori Y. Jilkine, and L. Edelstein-Keshet, *Wave-pinning and cell polarity from bistable reaction-diffusion system*, Biophys. J., **94** (2008) 3684-3697.

[66] Y. Mori, Y. Jilkine, and L. Edelstein-Keshet, *Asymptotic and bifurcation analysis of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization*, SIAM J. Appl. Math. **71** (2011), 1401-1427.

[67] Y. Morita, *Spectrum comparison for a conserved reaction-diffusion system with a variational property*, J. Appl. Anal., Comput., **2** (2012), 57-71.

[68] Y. Morita and T. Ogawa, *Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass*, Nonlinearity, **23** (2010), 1387-1411.

[69] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995), 581-601.

[70] A. Novick-Cohen, *On the viscous Chan-Hilliard equation*, in: J.M. Ball(Ed.), Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Mathematical Problems, Clarendon Press, Oxford, 1988, 329-342.

[71] M. Otsuji, S. Ishihara, C. Co, K. Kaibuchi, A. Mochizuki, and S. Kuroda, *A mass conserved reaction-diffusion system captures properties of cell polarity*, PLoS Comput. Biol. **3** (2007), 1040-1054.

[72] T. Hillen and K. J. Painter, *A user's guide to PDE models for chemotaxis*, J. Math. Biol. **58** (2009), 183-217.

[73] E. Keller and L. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theoret. Biol. **26** (1970), 399-415.

[74] K. Pham, A. Chauviere, H. Hatzikirou, X. Li, H. M. Byrne, V. Cristini and J. Lowengrub, *Density-dependent quiescence in glioma invasion: instability in a simple reaction-diffusion model for the migration/proliferation dichotomy*, J. Biol. Dyn., **6** (2012), 54-71.

[75] T. Senba and T. Suzuki, *Parabolic system of chemotaxis: blowup in a finite and the infinite time*, Methods Appl. Anal. **8** (2001), 349-367.

[76] T. Suzuki and S. Tasaki, *Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term*, Nonlinear Anal., **71** (2009) 1329-1349.

[77] X. Wang and Q. Xu, *Spiky and transition layer steady states of chemotaxis systems via global bifurcation and Helly compactness theorem*, J. Math. Biol. **66** (2013), 1241-1266.