走化性方程式の爆発解の構成 II

Takasi Senba (Fukuoka University, Japan)

Based on the paper by Raphaël and Schweyer (2012)

福岡工業大学　レクチャーシリーズ, 2022/05/14-15/

考える方程式系

$$(PE)\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot u \nabla v & \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, T_*), \\ 0 = \Delta v + u & \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, T_*), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

- $u_0 \geq 0$ is smooth, non-negative and radial in $\mathbf{R}^2$.
- T_* は古典解の最大存在時刻であり、$T_* < \infty$ ならば解の爆発時刻である。

目的. 上記の有限時刻爆発解の構成を、P. Raphaël and R Schweyer ['12] の論文の方法に沿って説明する。

結果 (P. Raphaël and R Schweyer ['12])

$$\|\varepsilon\|_{L^2_Q} = \left(\int \frac{\varepsilon^2}{Q}\right)^{1/2}$$

$$\|\varepsilon\|_{H^2_Q} = \|\Delta\varepsilon\|_{L^2_Q} + \left\|\frac{\nabla\varepsilon}{1+|x|}\right\|_{L^2_Q} + \|\varepsilon\|_{L^2}.$$

$$\|\varepsilon\|_{\mathcal{E}} = \|\varepsilon\|_{H^2_Q} + \|\varepsilon\|_{L^1}.$$

\# $Q(x) = \dfrac{8}{(1+|x|^2)^2}$。$(Q, \log Q)$ は (PE) の定常解である。

\# (u, v) が (PE) の解であれば $(u, v+c)$(c は任意定数) も解であることを踏まえて、以後"(PE) の解 u" と呼び、

$v(x,t) = \displaystyle\int u(\tilde{x},t)\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-\tilde{x}|}d\tilde{x}$ と定義する。

\# 遠方での減衰や滑らかさに関して十分良い初期値を考えることで一意に存在し、遠方での減衰や滑らかさの意味で適当な解を考える。

結果 (P. Raphaël and R Schweyer ['12])

Theorem. There exists initial data of the form $u_0 = \frac{1}{\lambda_0^2} Q(r/\lambda_0) + \frac{1}{\lambda_0^2}\varepsilon_0(r/\lambda_0)$ satisfies that

$$\|\varepsilon_0\|_{\mathcal{E}} \ll 1, \quad 0 < \int u_0 - 8\pi \ll 1, \quad 0 < \lambda_0 \ll 1,$$

where $Q(r) = \frac{8}{(1+r^2)^2}$,

The corresponding solution (u, v) satisfy that

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda(t)^2} Q\left(\frac{x}{\lambda(t)}, t\right) + \frac{1}{\lambda(t)^2} E\left(\frac{x}{\lambda(t)}, t\right) \text{ and}$$

$$v(x,t) = \mathcal{K}[u](x,t) = \int \left\{\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-\tilde{x}|}\right\} u(\tilde{x}, t) \text{ with}$$

$$\|E(\cdot,t)\|_{H_Q^2} \to 0 \quad \text{as } t \to T_*,$$

$$\lambda(t) = \sqrt{T_* - t}\exp\left(-\sqrt{\frac{|\log(T_*-t)|}{2}} + O(1)\right) \text{ as } t \to T_*.$$

補足 (Herrero and Velázquez ['96] との関連)

- Herrero and Velázquez では同様の性質を持つ球対称解を構成しているが Raphaël and Schweyer では、球対称解に近いが球対称である必要はない。

- Herrero and Velázquez では接合漸近展開法 (走化性方程式の爆発解の構成 I で説明した手法) を用いており、空間 11 次元以上でベキが $p > p_{JL}$ 以上の藤田型非線形熱方程式の爆発解の構成 (Herrero and Velázquez, Mizoguchi, Seki etc)、空間 11 次元以上の走化性方程式 (S., S. and Mizoguchi etc)、Harmonic map の Heat flow (Seki etc) 等の爆発解の構成に応用できる。
$\#$ 比較定理を用いる。

補足 (Herrero and Velázquez ['96] との関連)

- Raphaël and Schweyer の手法も mass critical Nonlinear Schrödinger equation, heat flow of 2D harmonic map , $p = (n+2)/(n-2)$ の非線形項を持つ藤田型熱方程式等の爆発解の構成に用いられている。

$\#$ 比較定理は使わない。

$\#$ “critical な場合”, “定常解が具体的に表現できる場合” に使える。

爆発解構成の方針

論文では球対称を仮定していないが、この解説では簡単のため扱う関数は全て球対称とする。
以下の自己相似変換された解 q を構成する。

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda(t)^2} q(y,s), \ \ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda(t)^2}, \ y = \frac{x}{\lambda(t)}.$$

$T_*(< \infty)$ を古典解の最大存在時刻 (爆発時刻) とする。
以下で λ の決定の仕方を述べるが結果的に λ, s は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda &= O(1)\sqrt{T_* - t}\exp(-\sqrt{|\log(T_* - t)|/2}), \\ s &= O(1)\sqrt{|\log(T_* - t)|/2}\exp(\sqrt{|\log(T_* - t)|/2}). \end{aligned}$$

従って、$s \to \infty$ ($t \to T_*$).

リアプノフ関数と線形化作用素

以下が成り立つ。

$$\mathcal{F}(u) = \int \left(u\log u - \frac{1}{2}uv \right) = \int \left(u\log u - \frac{1}{2}u\mathcal{K}[u] \right)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u) + \int Q|\nabla(\log u - v)|^2 = 0$$

実際、$\frac{d}{dt}\int u = 0$ より

$$\int u_t(\log u - v) = \int [\nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v)](\log u - v).$$

$$\int [\nabla\cdot u\nabla(\log u - v)](\log u - v) = -\int u|\nabla(\log u - v)|^2.$$

$$\int u_t(\log u - v) = \int [(u\log u)_t - u_t + \Delta v_t v]$$

$$= \frac{d}{dt}\int [(u\log u) - \frac{1}{2}|\nabla v|^2] = \frac{d}{dt}\int [(u\log u) - \frac{1}{2}uv].$$

リアプノフ関数と線形化作用素

$p \in L^2_Q$, $\int p = 0$ and $Q + \eta p > 0 (|\eta| \ll 1)$ であるとき、

$$\mathcal{H}(\eta, p) = \int (Q + \eta p) \left[\log(Q + \eta p) - \frac{1}{2} \mathcal{K}[Q + \eta p] \right] \geq \mathcal{H}(0, p).$$

(対数型 HLS)

ゆえに、$\mathcal{H}''(0, p) = \int \left[\frac{p^2}{Q} - p\mathcal{K}[p] \right] = \int p\mathcal{M}[p] \geq 0$.

更に、$\mathcal{K}[Q] = \log Q - \log 8$ より

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\nabla u - u\nabla\mathcal{K}[u]) = \nabla \cdot (\nabla(Q + \eta p) - (Q + \eta p)\nabla\mathcal{K}[Q + \eta p]) \\
&= \eta \{ \nabla \cdot (\nabla p - p\nabla\mathcal{K}[Q] - Q\nabla\mathcal{K}[u]) \} + O(1)\eta^2 \\
&= \eta \left\{ \nabla \cdot Q\nabla \left[\frac{p}{Q} - \mathcal{K}[p] \right] \right\} + O(1)\eta^2
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}[p] = \nabla \cdot Q\nabla \left(\frac{p}{Q} - \mathcal{K}[p] \right) = \nabla \cdot Q\nabla\mathcal{M}[p]$(線形作用素).

リアプノフ関数と線形化作用素

線形化作用素 $\mathcal{L}[p] = \nabla \cdot Q\nabla \left(\frac{p}{Q} - \mathcal{K}[p]\right) = \nabla \cdot Q\nabla\mathcal{M}[p]$ に関して以下が成り立つ。

$\mathcal{L}[\Lambda Q] = 0$。つまり、$\Lambda Q \in \mathrm{Ker}[\mathcal{L}]$。

実際、
$Q_\lambda(y) = \frac{8}{\lambda^2(1+|y|^2/\lambda^2)^2}$ (定常解　$\nabla \cdot [\nabla Q_\lambda - Q_\lambda \nabla\mathcal{K}[Q_\lambda]] = 0$)
$\Lambda Q(y) = -\frac{\partial Q_\lambda}{\partial\lambda}_{|\lambda=1} = 2Q(y) + y\cdot\nabla Q(y)$.

その時、直接計算により以下を確認できる。
$$\mathcal{M}[\Lambda Q] = \frac{\Lambda Q}{Q} - \mathcal{K}[\Lambda Q] = -2$$
従って、
$\mathcal{L}[\Lambda Q] = \nabla \cdot Q\nabla\mathcal{M}[\Lambda Q] = 0$.

爆発解構成の方針

- 初期条件 u_0 より時間局所古典解 u が一意的に存在する。
- 変換後の解 q は、$\lambda(s)$ と u によって決定される。
- パラメータ $0 < b(s) \ll 1$ を導入して近似解
$Q_b = Q + bT_1 + b^2T_2$ を構成し、$q - Q_b$ に 2 つの直交条件を課すことにより (λ, b) の満たす常微分方程式系を導くことで 2 つのパラメーターを決定し、変換後の解 q を決定する。
- ここで、T_1、T_2、λ、b の満たす方程式は大まかに以下のようになる。(詳細はあとで説明する。)

$$\mathcal{L}[T_1] = \nabla \cdot Q\nabla \left(\frac{T_1}{Q} - \mathcal{K}[T_1]\right) = \nabla \cdot (yQ).$$

$$\mathcal{L}[T_2] = \nabla \cdot Q\nabla \left(\frac{T_2}{Q} - \mathcal{K}[T_2]\right) = \nabla \cdot (yT_1) + \nabla \cdot T_1 \nabla \mathcal{K}[T_1] + \text{補正項}.$$

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} + b = o(1), \qquad b_s + \frac{2b^2}{|\log b|} = o(1).$$

q と $q - Q_b$ の満たす方程式

$$
\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\lambda^2} q(x/\lambda, s)\right]\frac{ds}{dt} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\left\{-2\frac{\lambda_s}{\lambda^3} q(x/\lambda, s) + \frac{1}{\lambda^2}(-\frac{\lambda_s}{\lambda})(x/\lambda)\nabla_y q(y, s)\right\} + \frac{1}{\lambda^4} q_s(y, s) \\
&= \frac{1}{\lambda^4}\left\{q_s(y, s) - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda q(y, s)\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\Lambda q = 2q + y \cdot \nabla_y q = \nabla \cdot (yq)$.

そして、$\nabla_x u \cdot \nabla_x v = \frac{1}{\lambda^4} \nabla_y q \cdot \nabla_y \mathcal{K}[q]$.

従って、$q_s - \dfrac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda q = \Delta q - \nabla \cdot q \nabla \mathcal{K}[q]$.

q と $q - Q_b$ の満たす方程式

$q = Q_b + \varepsilon = (Q + bT_1 + b^2T_2) + \varepsilon$ とおく。
Q_b は近似解であり、後で満たすべき方程式を与える。

$$
\begin{aligned}
q_s - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda q &= \frac{\partial}{\partial s}(Q_b + \varepsilon) - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda(Q_b + \varepsilon) \\
&= \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} + \frac{db}{ds}\frac{\partial Q_b}{\partial b} - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda Q_b + b\Lambda Q_b \\
&= \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon + b\Lambda Q_b + \frac{db}{ds}\frac{\partial Q_b}{\partial b} - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda Q_b \\
&= \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon + b\Lambda(Q + bT_1 + b^2T_2) \\
&\quad + \frac{db}{ds}(T_1 + 2bT_2) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda(Q + bT_1 + b^2T_2),
\end{aligned}
$$

q と $q-Q_b$ の満たす方程式

$$
\begin{aligned}
&\Delta q - \nabla\cdot q\nabla\mathcal{K}[q] \\
&\quad= \Delta\left\{Q + bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon\right\} \\
&\qquad - \left\{\nabla(Q + bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon)\nabla\mathcal{K}[Q + bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon]\right\} \\
&\quad= \{\Delta Q - \nabla\cdot Q\nabla\mathcal{K}[Q]\} \\
&\qquad + \Big\{\Delta(bT_1 + b^2T_2) - \nabla\cdot(bT_1 + b^2T_2)\nabla\mathcal{K}[Q] \\
&\qquad\qquad - \nabla\cdot Q\nabla\mathcal{K}[bT_1 + b^2T_2]\Big\} \\
&\qquad + \{\Delta\varepsilon - \nabla\cdot\varepsilon\nabla\mathcal{K}[Q] - \nabla\cdot Q\nabla\mathcal{K}[\varepsilon]\} \\
&\qquad - \nabla(bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon)\nabla\mathcal{K}[bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon].
\end{aligned}
$$

両辺を b で展開し $b_s \sim b^2$、$\varepsilon \sim b^{3/2}$ とみなして b と b^2 の項が消えるように T_1、T_2 の方程式を決める。

q と $q - Q_b$ の満たす方程式

$\mathcal{M}[T] = \frac{T}{Q} - \mathcal{K}[T]$, $\mathcal{L}[T] = \nabla \cdot Q \nabla \mathcal{M}[T]$ とおく。
$\mathcal{L}$ は方程式の右辺の Q における線形化作用素である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[T_1] &= \Lambda Q, \\ \mathcal{L}[T_2] &= \Lambda T_1 - c_b \chi_{B_0/4} T_1 + \nabla \cdot T_1 \nabla \mathcal{K}[T_1]. \end{aligned}$$

ここで B を正の数とするとき、χ_B は球対称な cut-off 関数であり $\chi_B(y) = 1(|y| \le B)$, $= 0(2B \le |y|)$ とし、$B_0 = 1/\sqrt{b}$ とする。
$c_b \chi_{B_0/4} T_1$ は補正項であり" よい近似解 T_2" を得るために加える。c_b は $\int_0^r (\Lambda T_1(\xi) - c_b \chi_{B_0/4} T_1(\xi))\xi d\xi$ が $r = \infty$ で減衰するように決める。結果として $c_b = \frac{2}{|\log b|}(1 + o(1))$ なる。
$\mathcal{L}[T] = 0$ は $\nabla \mathcal{K}[T] \sim \int_0^r T(\xi)\xi d\xi$ の微分方程式である。

q と $q-Q_b$ の満たす方程式

以上により決めた T_1、$T_2(=T_2(r,b))$ は以下の評価を持つ。

$$
\begin{aligned}
T_1 &= O(1)|y|^2 \ (|y|\le 1), \quad = \frac{O(1)}{|y|^2} \ (|y|\ge 1),\\
T_2 &= O(1)|y|^2 \ (|y|\le 1), \quad = O(1)\frac{1}{b^2|y|^4|\log b|} \ (|y|\ge B_0),
\end{aligned}
$$

ここで $\mathcal{K}[T]=\frac{|y|^2-1}{1+|y|^2} \Rightarrow \Delta\mathcal{K}[T]+Q\mathcal{K}[T]=0 \Rightarrow$ $\mathcal{M}[T]=\frac{T}{Q}-\mathcal{K}[T]=0 \Rightarrow \mathcal{L}[T]=\nabla\cdot Q\nabla\mathcal{M}[T]=0$ であることと定数変化法により 2 つの基本解が求まるので T_1 と T_2 を積分表示して評価する。

q と $q - Q_b$ の満たす方程式

従って、先の方程式を満たす T_1、T_2 を用いて $\varepsilon = q - Q_b$ は以下の方程式を満たす。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon - \mathcal{L}[\varepsilon] \\
&\quad = \left\{b^2\nabla\cdot T_1\nabla\mathcal{K}[T_1] - \nabla(bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon)\nabla\mathcal{K}[bT_1 + b^2T_2 + \varepsilon]\right\} \\
&\qquad + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda Q_b - \left\{\frac{db}{ds}(T_1 + 2bT_2) + c_b b^2 \chi_{B_0/4} T_1\right\}.
\end{aligned}$$

- 右辺の第 1 項は $\varepsilon \sim b^{3/2}$ と仮定すると $O(1)b^3$ である。

補足. 次に ε に適当な直交条件を課すことで左辺の"第 2 項 $=$ 第 3 項 $= 0$ が b と λ の満たす方程式となることを示す。

λ と b の満たす方程式

T_1 が $L^1(\mathbf{R}^2)$ に入っていないことに注意して、T_1、T_2 を局所化し、$q = Q_{b,loc} + \varepsilon$ を考える。ここで、

$T_{1,loc} = \chi_{B_1} T_1$, $T_{2,loc} = \chi_{B_1} T_2$, $B_1 = |\log b|/\sqrt{b}$

であり、

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda} \Lambda \varepsilon - \mathcal{L}[\varepsilon] = E_{loc} + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b \right) \Lambda Q_{b,loc} - \left\{ \frac{db}{ds} (T_{1,loc} + 2b T_{2,loc}) + c_b b^2 \chi_{B_0/4} T_1 \right\}.$$

ここで、

$$E_{loc} \sim b^2 \nabla \cdot T_1 \nabla \mathcal{K}[T_1] - \nabla (bT_1 + b^2 T_2 + \varepsilon) \nabla \mathcal{K}[bT_1 + b^2 T_2 + \varepsilon].$$

λ と b の満たす方程式

$\|q-Q\|_{L^1} \ll 1$ を満たす $\mathrm{q} \in L^1(\mathbf{R}^2)$ に対して以下の分解が一意に存在する。

$\mathrm{q}(y) = \frac{1}{\mu^2} Q_{\beta,loc}(y/\mu) + \mathrm{e}(y)$, $\quad (\mathrm{e}, \Phi_M) = (\mathrm{e}, \mathcal{L}^* \Phi_M) = 0$.

ただし、

$(\mathcal{L}p, q) = (q, \mathcal{L}^* q)$, $\quad \|\mathrm{e}\|_{L^1} + |\mu| + |\beta| \ll 1$.

$\Phi_M = \chi_M |y|^2 + c_M \mathcal{L}^* [\chi_M |y|^2]$ with $(\Phi_M, T_{1,loc}) = 0$.

このとき、以下を満たす $\delta_0 > 0$ がある。

$(\mathcal{M}\mathcal{L}[e], \mathcal{L}[e]) \geq \delta_0 \displaystyle\int \frac{|\mathcal{L}[e]|^2}{Q}$,

$\displaystyle\int \frac{|\mathcal{L}[e]|^2}{Q} \geq \delta_0 \|e\|^2_{H^2_Q}$.

λ と b の満たす方程式

分解の証明は

$$\mathfrak{e}(y,\mu,\beta) = q(y) - \frac{1}{\mu^2} Q_{\beta,loc}(y/\mu),$$
$$\mathfrak{e}(y,1,0) = q(y) - Q(y),$$
$$\mathcal{F}(\mathfrak{e}) = [(\mathfrak{e},\Phi_M),(\mathfrak{e},\mathcal{L}^*\Phi_M)]$$

とおき、陰関数定理を用いる。

λ と b の満たす方程式

- $\dfrac{\partial(\mathfrak{e},\Phi_M)}{\partial\mu}(1,0) = -\left(2Q + y\cdot\nabla Q, \Phi_M\right)$

$= -(\Lambda Q, \Phi_M) = O(1)\log M$.

- $\dfrac{\partial(\mathfrak{e},\mathcal{L}^*\Phi_M)}{\partial\mu}(1,0) = (\Lambda Q, \mathcal{L}^*\Phi_M) = -(\mathcal{L}\Lambda Q, \Phi_M) = 0$.

ここで、$\mathcal{L}[\Lambda Q] = \nabla\cdot Q\nabla\mathcal{M}[\Lambda Q] = 0$.

- $\dfrac{\partial(\mathfrak{e},\Phi_M)}{\partial\beta}(1,0) = \big(T_{1,loc}, \Phi_M\big) = 0$.
- $\dfrac{\partial(\mathfrak{e},\mathcal{L}^*\Phi_M)}{\partial\beta}(1,0) = (T_{1,loc}, \mathcal{L}^*\Phi_M)$

$= (\mathcal{L}T_{1,loc}, \Phi_M) = (\Lambda Q, \Phi_M)(1+o(1)) = O(1)\log M$.

$\exists_1(\mu,\beta)$ **s.t.** $q = \mu^{-2}Q_{\beta,loc}(y/\mu) + \mathrm{e}$, $(\mathrm{e},\Phi_M) = (\mathrm{e},\mathcal{L}^*\Phi_M) = 0$.

$(\mu\lambda, \beta, \mu^2\mathrm{e}(\mu y)) \to (\lambda, b, \varepsilon)$.

λ と b の満たす方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon - \mathcal{L}[\varepsilon] = E_{b,loc}$$
$$+ \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda Q_{b,loc} - \left\{\frac{db}{ds}(T_{1,loc} + 2bT_{2,loc}) + c_b b^2 \chi_{B_0/4} T_1\right\}.$$

- (Eqn, Φ_M) とすると $(\varepsilon_s, \Phi_M) = (\mathcal{L}[\varepsilon], \Phi_M) = (T_1, \Phi_M) = 0$ 等により

$$\left|\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right| \lesssim \frac{b^2}{|\log b|}.$$ つまり $\frac{\lambda_s}{\lambda} + b \sim 0$

となり、λ の微分方程式が定まった。

λ と b の満たす方程式

$$-\frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon - \mathcal{L}[\varepsilon] = E_{b,loc} + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda Q_{b,loc}$$
$$-\left\{\left[\frac{d}{ds}(bT_{1,loc} + \varepsilon) + c_b b^2 \chi_{B_0/4} T_1\right] + 2\frac{db}{ds} bT_{2,loc}\right\}.$$

- (Eqn, $\mathcal{L}^*\Phi_{B_0}$) とすると $(\Lambda Q, \mathcal{L}^*[\Phi_{B_0}]) = 0$、
$\varepsilon \sim b^{3/2}/|\log b|^2$(この後のスライドでこの評価を示す。),
$(\mathcal{L}[T_{1,loc}], \Phi_{B_0}) \sim (\Lambda Q, \chi_{B_0}|y|^2) = O(1)|\log b|$ 等により

$$\left|\frac{d\hat{b}}{ds} + c_b b^2\right| \lesssim \frac{b^2}{|\log b|^2}.$$ つまり、 $$\frac{d\hat{b}}{ds} + \frac{2\hat{b}^2}{|\log \hat{b}|} \sim 0$$

ここで、 $\hat{b} = b + \dfrac{(\mathcal{L}[\varepsilon], \Phi_{B_0})}{(\mathcal{L}[T_{1,loc}], \Phi_{B_0})}$, $c_b \sim \frac{2}{|\log b|}$.

λ と b の満たす方程式

以上より、

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} = -b(1+o(1)).\ \text{つまり}\ \frac{\lambda_s}{\lambda} + b \sim 0$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} + c_{\hat{b}}\hat{b}^2 = o(1)c_{\hat{b}}\hat{b}^2.\ \text{つまり、}\ \frac{d\hat{b}}{ds} + \frac{2\hat{b}^2}{|\log \hat{b}|} \sim 0$$

となり、$(\lambda, \hat{b})$ の微分方程式が定まった。従って、

$$b(s) = \hat{b}(s) - \frac{(\mathcal{L}[\varepsilon], \Phi_{B_0})}{(\mathcal{L}[T_{1,loc}], \Phi_{B_0})} = \frac{\log s}{2s}(1+o(1)) \to 0 \text{ as } s \to \infty,$$

$$\lambda(s) = O(1)\exp\left(-\frac{(\log s)^2}{4}(1+o(1))\right) \to 0 \text{ as } s \to \infty,$$

ε の評価

ここで、b の代わりに $\hat{b}$ を用いた分解 $q = Q_{\hat{b},loc} + \hat{\varepsilon}$ を用い

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\hat{\varepsilon} - \mathcal{L}[\hat{\varepsilon}] = E_{\hat{b},loc} + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + \hat{b}\right)\Lambda Q_{\hat{b},loc} - \left\{\frac{d\hat{b}}{ds}(T_{1,loc} + 2\hat{b}T_{2,loc}(\cdot,\hat{b})) + c_{\hat{b}}\hat{b}^2\chi_{B_0/4}T_1\right\}.$$

両辺に $\mathcal{L}$ を施し $\mathcal{L}[\varepsilon]$ を評価する。その際の右辺の概算は

$$\mathcal{L}[E_{\hat{b},loc}] \sim \hat{b}^3,$$

$$\mathcal{L}\left[\left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + \hat{b}\right)\Lambda Q_{\hat{b},loc}\right] \sim \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + \hat{b}\right)\mathcal{L}[bT_1 + b^2T_2] \sim \frac{\hat{b}^3}{|\log\hat{b}|},$$

右辺第 3 項 $\sim \dfrac{\hat{b}^2}{|\log\hat{b}|^2}$.

ε の評価

これ以降 $\mathcal{L}[\hat{\varepsilon}]$ の方程式からの評価と $\hat{\varepsilon} - \varepsilon = Q_{\hat{b},loc} - Q_{b,loc}$ の評価を用いて $\mathcal{L}[\varepsilon]$ を評価するが、簡単のために $\hat{b}$ を b とみなして説明する。

初期条件. $q_0 = Q_{b_0,loc} + \varepsilon_0$, $(\varepsilon_0, \Phi_M) = (\varepsilon_0, \mathcal{L}^*[\varepsilon_0]) = 0$.

$0 < \int q_0 - 8\pi \ll 1$, $\|\varepsilon_0\|_{L^2_Q} = \left(\int \frac{|\varepsilon_0|^2}{Q}\right)^{1/2} \ll 1$, $0 < b_0 \ll 1$.

仮定. $q(y,t) = Q_{b,loc} + \varepsilon$ が $0 < s < S$ において以下を満たしていると仮定する。

$(\varepsilon(s)), \Phi_M) = (\varepsilon(s), \mathcal{L}^*[\varepsilon_0]) = 0$.

$0 < b(s) < 10b_0$, $\|\varepsilon(s)\|_{L^1} < \delta_0$, $\|\varepsilon(s)\|_{L^2_Q} \leq K \frac{b^2}{|\log b|^3}$.

ε の評価

命題 1. $0 < s < S$ において以下が成り立つ。

$(\varepsilon(s), \Phi_M) = (\varepsilon(s), \mathcal{L}^*[\Phi_M]) = 0$.

$0 < b(s) < 2b_0$, $\|\varepsilon(s)\|_{L^1} < \dfrac{1}{2}\delta_0$, $\|\mathcal{L}[\varepsilon](s)\|_{L^2_Q} \leq \dfrac{K}{2}\dfrac{b^3}{|\log b|^2}$. つまり、$0 < s$ において q,b は命題の評価を満たす。

I. この評価の概要については後のスライドで説明する。
II. また、後のスライドで $\|\varepsilon\|_{H^2_Q} \lesssim \|\mathcal{L}[\varepsilon]\|_{L^2_Q}$ を示す。

ここから、得られた ε、b、λ から $t = t(s)$ と $T^* < \infty$ を求め、

$\lim_{s\to\infty} b(s) = \lim_{s\to\infty} \lambda(s) = 0$,
$\lim_{s\to\infty} \|\mathcal{L}[\varepsilon]\|_{L^2_Q} = \lim_{s\to\infty} \|\varepsilon\|_{H^2_Q} = 0$

より $\lim_{t\to T^*} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \infty$ が得られる。

I. 命題 1 の証明の概略

$(\mathcal{M}[\mathcal{L}[\varepsilon]], \mathcal{L}[\varepsilon])$ を s で微分し ε の方程式 (実際は $\hat{\varepsilon}$ の方程式に) を用いて評価する方針で議論を進めるのだが、ここでは (y, s) 変数を $(x.t)$ 変数に戻して不等式を示す。
ε の方程式の右辺を $F = F(y, s)$ と書くと方程式は以下となる。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - \frac{\lambda_s}{\lambda} \Lambda \varepsilon = \mathcal{L}[\varepsilon] + F,$$

これを (x, t) 変数に戻し、$\varepsilon_\lambda(x, t) = \frac{1}{\lambda^2} \varepsilon(x/\lambda, s(t))$,
$F_\lambda(x, , t) = \frac{1}{\lambda^2} F(x/\lambda, s(t))$、$\mathcal{M}_\lambda[v] = \frac{v(x)}{Q_\lambda(x)} - \mathcal{K}[v](x)$,
$\mathcal{L}_\lambda[v](x) = \nabla_x \cdot Q_\lambda(x) \nabla_x [\mathcal{M}_\lambda[v](x)]$ とする。

$\partial_t \varepsilon_\lambda = \mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda] + \frac{1}{\lambda^2} F_\lambda$.
$\partial_t \mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda] = \mathcal{L}_\lambda[\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda]] + \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{L}_\lambda[F_\lambda] + [\partial_t, \mathcal{L}_\lambda] \varepsilon_\lambda$.

ここで、 $[\partial_t, \mathcal{L}_\lambda] \varepsilon_\lambda = \partial_t(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda]) - \mathcal{L}_\lambda[\partial_t \varepsilon_\lambda]$.

I. 命題 1 の証明の概略

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathcal{M}_\lambda \mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda], \mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda]) = \\
&-\int Q_\lambda |\nabla \mathcal{M}_\lambda \mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda]|^2 + (\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda], \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{M}_\lambda \mathcal{L}_\lambda F_\lambda) \\
&-\int ([\partial_t, \mathcal{A}_\lambda][\varepsilon_\lambda] \cdot \nabla \mathcal{M}_\lambda \mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda]) + \int \frac{(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])^2}{\lambda^2 Q_\lambda^2}\left[\left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)(\Lambda Q)_\lambda\right] \\
&-\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{2\lambda^2 Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])^2.
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{A}_\lambda[v](x) = Q_\lambda \nabla_x \mathcal{M}_\lambda[v]$. つまり、$\mathcal{L}_\lambda = \nabla_x \cdot \mathcal{A}_\lambda$.

$\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{2\lambda^2 Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])^2$ は評価できない項。

I. 命題 1 の証明の概略

$$\frac{d}{dt}\left\{\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2 Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])[\varepsilon_\lambda]\right\} = \int (\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])[\varepsilon_\lambda]\frac{d}{dt}\left\{\frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2 Q_\lambda^2}\right\}$$
$$+\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2 Q_\lambda^2}[\varepsilon_\lambda]\left[(\mathcal{L}_\lambda)^2[\varepsilon_\lambda] + \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{L}_\lambda F_\lambda + \nabla\cdot([\partial_t, \mathcal{A}_\lambda][\varepsilon_\lambda])\right]$$
$$+\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2 Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])\left[\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda] + \frac{1}{\lambda^2}F_\lambda\right].$$

ここで、

$\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2 Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])^2[\varepsilon_\lambda]$,

$\int \frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2 Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])[\varepsilon_\lambda]$

は評価できない項。

I. 命題 1 の証明の概略

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(\mathcal{M}_\lambda\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda],\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])+\int\frac{b(\Lambda Q)_\lambda}{\lambda^2Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])[\varepsilon_\lambda]-2\int\frac{b(\mathcal{A}_\lambda[\varepsilon_\lambda])^2}{\lambda^2Q_\lambda}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{(\mathcal{M}_\lambda\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda],\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])$$

$$+\int\frac{b[2Q_\lambda+(\Lambda Q)_\lambda]}{\lambda^2Q_\lambda^2}(\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])[\varepsilon_\lambda]-2\int\frac{b}{\lambda^2}\left[Q_\lambda\nabla\mathcal{M}_\lambda[\varepsilon_\lambda]\cdot\nabla\mathcal{K}[\varepsilon_\lambda]\right]\Big\}$$

$$\leq-\int Q_\lambda|\nabla\mathcal{M}_\lambda\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda]|^2+\frac{b}{\lambda^2}(\mathcal{M}_\lambda\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda],\mathcal{L}_\lambda[\varepsilon_\lambda])$$

$+$” 評価可能な項たち”.

\# ” 評価できない項” たちが、相殺されて” 評価可能な項” たちに変形された。

この微分不等式を評価することで $(\mathcal{M}\mathcal{L}[\varepsilon],\mathcal{L}[\varepsilon])\ll K\frac{b^3}{|\log b|^2}$ を得る。

命題 2. 任意の十分大きな $M>0$ に対して以下を満たす正定数 $\delta_0=\delta_0(M)$ がある。

$(\varepsilon,\Phi_M)=(\mathcal{L}[\varepsilon],\Phi_M)=0$ を満たす $\varepsilon\in\mathcal{E}$ に対して

(i) $(\mathcal{M}[\mathcal{L}[\varepsilon]],\mathcal{L}[\varepsilon])\geq\delta_0\|\mathcal{L}[\varepsilon]\|_{L^2_Q}^2$,

(ii) $\displaystyle\int\frac{|\mathcal{L}[\varepsilon]|^2}{Q}\geq\delta_0\|\varepsilon\|_{H^2_Q}^2.$

が成り立つ。ここで、

$$\|\mathcal{L}[\varepsilon]\|_{L^2_Q}^2=\int\frac{|\mathcal{L}[\varepsilon]|^2}{Q},$$

$$\|\varepsilon\|_{H^2_Q}^2=\int(1+|y|)^4|\Delta\varepsilon|^2+\int(1+|y|)^2|\nabla\varepsilon|^2+\int|\varepsilon|^2.$$

II Coercivity of $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$

(i) $p \in L^1_Q$, $\int p = 0$ and $Q + \eta p > 0(|\eta| \ll 1)$ であるとき、

$$\mathcal{H}(\eta, p) = \int (Q + \eta p)\left[\log(Q + \eta p) - \frac{1}{2}\mathcal{K}[Q + \eta p]\right] \geq \mathcal{H}(0, p).$$

従って、$\mathcal{H}''(0, p) = \int p\mathcal{M}[p] \geq 0$. 更に、

$$\inf\left\{(\mathcal{M}[p], p)\ ;\ (p, 1) = (p, \Lambda Q) = 0, \|p\|_{L^2_Q} = 1\right\} \geq \delta_0 > 0$$

を背理法で示すことができる。

$p = \mathcal{L}[\varepsilon] - a\Lambda Q$, $a = (\mathcal{L}[\varepsilon], \Lambda Q)/(\Lambda Q, \Lambda Q)$ とおくと

$(\mathcal{M}[q], q) \geq \delta_0\|q\|^2_{L^2_Q}$. さらに、$a = -(p, \Phi_M)/(\Lambda Q, \Phi_M)$ より

$$(\mathcal{M}[q], q) = (\mathcal{M}[\mathcal{L}[\varepsilon]] - 2a, \mathcal{L}[\varepsilon] + a\Lambda Q) = (\mathcal{M}[\mathcal{L}[\varepsilon]], \mathcal{L}[\varepsilon])$$

$\|\mathcal{L}[\varepsilon]\|^2_{L^2_Q} \lesssim \|p\|^2_{L^2_Q} + |a|^2 \lesssim \|p\|^2_{L^2_Q}$.

(ii) 部分積分等を用いることにより

$$\int \frac{|\mathcal{L}[\varepsilon]|^2}{Q} \geq \delta \|\varepsilon\|_{H_Q^2}^2 - \int \left[|\nabla \varepsilon|^2 + \frac{|\varepsilon|^2}{(1+|y|^2)} \right].$$

を示す。背理法により示す為、以下の ε_n の存在を仮定する。

$\|\varepsilon_n\|_{H_Q^2} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{L}[\varepsilon_n]\|_{L_Q^2} = 0$,
$(\varepsilon_n, \Phi_M) = (\mathcal{L}[\varepsilon_n], \Phi_M) = 0$.

このとき、部分列の極限 ε_* は、

$$\int \left[|\nabla \varepsilon_*|^2 + \frac{|\varepsilon_*|^2}{(1+|y|^2)} \right] \geq \delta$$ (つまり、$\varepsilon_* \neq 0$)、$\mathcal{L}[\varepsilon_*] = 0$

を満たし、これを解くと $\varepsilon_* = C\Lambda Q$ となるが、$(\varepsilon_*, \Phi_M) = 0$ より $\varepsilon_* = 0$ となり、矛盾。

I. 命題 1 の証明の概略

従って、$(\varepsilon, \Phi_M) = (\mathcal{L}[\varepsilon], \Phi_M) = 0$ のとき、
$(\mathcal{M}\mathcal{L}[\varepsilon], \mathcal{L}[\varepsilon]) \ll K \frac{b^3}{|\log b|^2}$ より

$(\mathcal{M}\mathcal{L}[\varepsilon], \mathcal{L}[\varepsilon]) \geq \delta_0 \int \frac{|\mathcal{L}[\varepsilon]|^2}{Q}$ となり
$\|\mathcal{L}\varepsilon\|^2_{L^2_Q} \leq \frac{K}{2} \frac{b^3}{|\log b|^2}$ $(0 < s < S)$ が成り立ち, 命題 1 が示される。

命題 1 より、初期条件が仮定を満たせば、$0 < s$ において、仮定が成り立つ（仮定の評価を得る。)

このことは、$\varepsilon(y, s) \to 0$, $q(y, s) \to 0$ $(s \to \infty)$
を意味しており、
$u(x, t) \sim \frac{1}{\lambda(t)^2} Q(x/\lambda(t))$, $\lambda(t) \to 0$ $(t \to T^*)$
を意味している。